شما **شنگول قصه‌ها** هستید و Δ شما در این **آزمون اصلی سه‌شنبه** برابر با **۱۱۲۸۷** است!

مسئله‌ی یک: شنگول می‌خواهد دایره بکشد! .... ۲۵ نمره

شنگول محور مثبت ایکس‌ها از ۱ تا $\Delta^۲$ را در اختیار دارد. برای هر نقطه‌ی i (که $۱ \leq i \leq \Delta^۲$) اگر ۲^K بزرگترین مقسوم‌علیه توان دوی i باشد، شنگول مجاز است با مرکزیت این نقطه یک دایره با شعاع ۲^K رسم کند. برای مثال از نقطه‌ی ۱۲ تنها می‌توان یک دایره با شعاع ۴ رسم کرد تا تمام نقاط ۸ و ۹ و ۱۰ و ... و ۱۶ را در بر بگیرد (نقاط روی دایره، زیر دایره محسوب می‌شوند).
شنگول می‌خواهد یک زیرمجموعه مثل Q از این نقاط را انتخاب کرده و به مرکزیت هر کدام از نقاط زیرمجموعه‌ی Q، دایره‌ی یکتای آن نقطه را بکشد طوری که پس از رسم تمامی دوایر، تمامی نقاط توسط حداقل یک دایره پوشیده بشوند.
توجه: در تمامی قسمت‌ها عدد π را ۳ بگیرید. توجه هم کنید که می‌خواهیم «تعداد» دایره‌ها کمینه باشد و نه مساحت؛ اما شما باید در خروجی هر سه قسمت حاصل‌جمع مساحت‌های تک تک این دایره‌های بهینه را بنویسید. اگر به دو یا چند حالت می‌توان با تعداد کمینه دایره کل نقاط را پوشاند (حالت تساوی از نظر تعداد دوایر)، حالتی که مجموع مساحت‌ها کمتر است مطلوب هستند.
دقت کنید که از نقطه‌ای خارج از این محدوده (مثل $\Delta^۲ + ۱$) مجاز به رسم دایره نیستیم، اما دایره‌هایی که می‌کشیم مجاز هستند خارج از این محدوده هم بروند.

۳- **الف (۵ نمره) :** در این قسمت بدون محدودیت اضافه‌ای شنگول می‌خواهد سایز مجموعه‌ی Q (تعداد دوایری که رسم می‌شوند) کمینه بشود. در این حالت اگر مجموع مساحت‌های این کمترین تعداد دایره $S_۱$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $S_۱$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

۳ - **ب (۱۰ نمره) :** اکنون فرض کنید شنگول اجازه‌ی رسم دایره به مرکزیت اعدادی که خودشان توان دو هستند (نظیر ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶ و ...) را ندارد. می‌توان نشان داد که با این تفسیر نقطه‌ی ۱ هرگز پوشیده نمی‌شود. حال اگر مجموع مساحت کمترین تعداد دایره برای پوشاندن نقاط ۲ تا $\Delta^۲$ برابر با $S_۲$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $S_۲$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

۳ - **ج (۱۰ نمره) :** اکنون فرض کنید شنگول مجدداً اجازه‌ی رسم دایره از تمام نقاط را دارد. اما این‌بار دوایر نباید جز روی مرزهایشان با هم تلاقی یا هم‌پوشانی داشته باشند. برای مثال نمی توان از ۱۲ و ۸ همزمان دایره رسم کرد، اما می‌توان از ۱۲ و ۱۸ همزمان دایره کشید تا با هم نقاط ۸ الی ۲۰ (بازه‌ی بسته) را بپوشانند. یا می‌توان با کشیدن دو دایره به مرکزیت ۸ و ۲۴ کلیه نقاط کوچکتر یا مساوی ۳۲ را پوشاند.

در این حالت اگر مجموع مساحت‌های این کمترین تعداد دایره $S_۳$ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $S_۳$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

مسئله‌ی دو: شنگول و کارت‌های خبیث! .... ۴۰ نمره

شنگول برای هر یک از اعداد ۱ تا ۱۰ (شامل خود این اعداد)، نمایش مبنای دوی آن عدد را روی یک کارت سفید نوشته است. او با پشت سر هم قرار دادن این ۱۰ کارت در یک ردیف می‌تواند اعداد ۲۹ بیتی مختلفی بسازد. دقت کنید که سمت چپ ترین بیت هر کارت حتماً ۱ است. هم‌چنین شنگول مجاز به چرخاندن یا برگرداندن کارت ها نبوده و فقط می‌تواند ترتیب کارت‌ها را جابجا کند.

۲- **الف (۱۰ نمره) :** اگر کوچکترین عدد ۲۹ بیتی‌ای که شنگول می‌تواند با استفاده از تمام ۱۰ کارت بسازد $M_۱$ باشد و بزرگترین عدد ۲۹ بیتی‌ای که شنگول می‌تواند با استفاده از تمام ۱۰ کارت بسازد $M_۲$ باشد،، در این‌صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم $M_۱ \times M_۲$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

۲ - **ب (۱۰ نمره) :** اگر تعداد اعداد ۲۹ بیتی‌ای که شنگول نمی‌تواند با این ۱۰ کارت آن‌ها را بسازد را P بنامیم، باقی‌مانده‌ی تقسیم $P^۲$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

۲ - **ج (۲۰ نمره) :** اکنون فرض کنید به‌جای ۱۰ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۰، شنگول همه‌ی این کارها را با ۱۶ کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۶ بخواهد انجام بدهد تا اعداد ۵۴ بیتی بسازد. در این صورت اگر کوچکترین عددی که شنگول می‌تواند با استفاده از تمام ۱۶ کارت بسازد M باشد و این عدد به K طریق (از !۱۶ طریق ممکن) قابل ساختن باشد، در این‌صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم $M \times K$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: ....

مسئله‌ی سه: شنگول به مدرسه می‌رود! .... ۳۵ نمره

دیشب شنگول تا دیروقت مشغول دیدن فیلم و فوتبال بود و تا صبح کابوس دید! به شنگول در کابوسش الهام شد که هر عدد طبیعی X را می‌توان به‌صورت $X = ۲^K M$ نوشت که در آن K عددی حسابی (نامنفی) و M عددی فرد است.
شنگول که خوشحال بود حتی در کابوس و رؤیا هم علم‌آموزی می‌کند، ناگهان خودش را در نقطه‌ی صفر و صفر (مرکز) در حالی که رو به بالا (انتهای محور مثبت ایگرگ‌ها در $x = ۰$) در یه جدول مختصات نامتناهی یافت! ندایی از دور به شنگول گفت که «یوهاهاها! تو در طلسم کابوس‌ها گیر افتاده‌ای! تو باید با شروع از عدد ۱، در هر مرحله ابتدا عدد مرحله را به صورت $۲^K M$ که در آن M عددی فرد و K عددی نامنفی است حساب کنی، سپس به‌تعداد K مرتبه گردش ۹۰ درجه در جهت ساعتگرد بکنی، و نهایتاً M گام به جلو (در جهتی که رو به آن قرار داری) راه بروی!»
شنگول شروع کرد به راه رفتن! برای مرحله اول، او حساب کرد که $۱ = ۲^۰ \times ۱$ و برای همین در همان جهت رو به شمال ای که بود یک گام برداشت تا به خانه‌ی $(۰, ۱)$ برسد ($x = ۰$ و $y = ۱$). در گام دوم او دید که $۲ = ۲^۱ \times ۱$ برای همین ابتدا ۹۰ درجه ساعتگرد چرخید تا رویش به سمت شرق بشود و سپس یک گام برداشت تا به خانه‌ی $(۱, ۱)$ برسد. در گام سوم شنگول مجبور بود طبق $۳ = ۲^۰ \times ۳$ بدون چرخاندن سرش ۳ گام به جلو بردارد و در نتیجه به خانه‌ی $(۴, ۱)$ رسید و ...

۳- **الف** (**۵ نمره**) **:** پس از ۲۰ گام اگر شنگول در نقطه‌ی (x, y) باشد، در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم $x^۹ y^۹$ بر Δ چند است؟ پاسخ شما: ....

۳- **ب** (**۱۰ نمره**) **:** پس از $\Delta^۲$ (دلتا به توان دو) گام اگر شنگول در نقطه‌ی (x, y) باشد، در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم $xy + x + y$ بر Δ چند است؟ پاسخ شما: ....

۳- **ج** (**۲۰ نمره**) **:** فرض کنید که شنگول مجاز است در یکی و تنها یکی از مراحلش (مثل مرحله i) تقلب کند و به‌جای عمل کردن طبق تجزیه‌ی i به یک توان دو و یک عدد فرد، یک عدد دیگری که خودش دوست دارد را به جای i در این مرحله استفاده کند. دقت کنید که مرحله بعدی (در صورت لزوم) الزاماً باید از $i + ۱$ دنبال شود.

در این حالت اگر بدانیم راه فرار از این جدول طلسم شده رسیدن به نقطه‌ی $(-۶۶, -۶۶۶۰۱۶)$ است، در این‌صورت شنگول پس از چند بار محاسبه (چندمین مرحله) می‌تواند به این نقطه خروج برسد؟ پاسخ خود را به توان دو رسانده و باقی مانده‌اش بر Δ را بنویسید. پاسخ شما: ....

دل‌شاد باشی شنگول عزیز!»