



## مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

### رشته نزدیک (۱۵ نمره)

۱۳۹۲ رشته به طول ۱۳۹۲ از حروف کوچک انگلیسی با نام‌های  $p_1, p_2, \dots, p_{1392}$  در اختیار داریم. فاصله دو رشته  $A = a_1, a_2, \dots, a_n$  و  $B = b_1, b_2, \dots, b_n$  را با  $d(A, B)$  نمایش می‌دهیم و این مقدار برابر است با تعداد اندیس‌های  $i$  که  $a_i \neq b_i$ . به عنوان مثال فاصله دو رشته  $palas$  و  $salam$  برابر با ۲ است زیرا تنها در مکان‌های اول و آخر با هم تفاوت دارند.

برای رشته  $X$  به طول ۱۳۹۲ مجموع فاصله‌هایش از این ۱۳۹۲ رشته را  $D_X$  می‌نامیم. به رشته‌ای مانند  $M$  به طول ۱۳۹۲، نزدیک می‌گوییم اگر به ازای هر رشته  $X$  به طول ۱۳۹۲:

$$D_M \leq D_X$$

الف) به ازای هر سه رشته هم طول دلخواه  $A, B, C$  نشان دهید  $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ . (۵ نمره)

ب) نشان دهید رشته‌ای مانند  $p_i$  از این ۱۳۹۲ رشته وجود دارد به طوری که  $D_M \leq D_{p_i} \leq 2D_M$ . (۱۰ نمره)



## مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

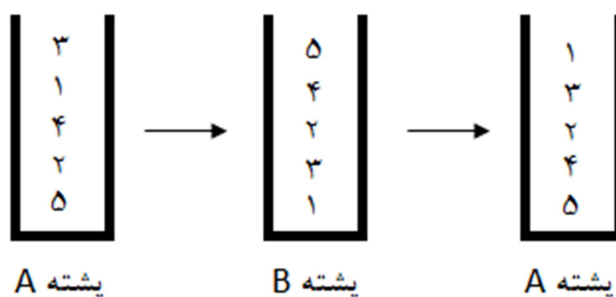
### مرتب‌ساز پشته‌ای (۱۵ نمره)

مرتب‌ساز پشته‌ای یک مرتب‌ساز با دو پشته است. در ابتدا در پشته اول که آن را پشته  $A$  می‌نامیم اعداد  $۱$  تا  $n$  با ترتیبی دلخواه قرار دارند و پشته دوم با نام  $B$  خالی است. این مرتب‌ساز قادر است عملیات زیر را انجام دهد:

- در هر مرحله دو عدد بالای پشته  $A$  را در نظر می‌گیرد و عدد کوچکتر را به پشته  $B$  انتقال می‌دهد و این کار را آنقدر تکرار می‌کند که در پشته  $A$  تنها یک عنصر باقی بماند و آن را نیز به پشته  $B$  منتقل می‌کند. سپس اعداد پشته  $B$  را به پشته  $A$  انتقال می‌دهد (توجه کنید که چون  $A$  و  $B$  پشته هستند ترتیب عناصر برعکس می‌شود).

اگر مرتب‌ساز پشته‌ای عملیات فوق را  $۱ \leq k \leq n$  بار انجام دهد به ازای چند جایگشت اولیه از اعداد  $۱$  تا  $n$  درون  $A$ ، در نهایت اعداد بصورت مرتب شده در پشته  $A$  قرار خواهند گرفت (عدد  $۱$  در بالای پشته و عدد  $n$  در پایین پشته). جواب را بر حسب  $n$  و  $k$  محاسبه و اثبات کنید.

بعنوان مثال در شکل زیر وضعیت پشته  $A$  بعد از یک بار انجام عملیات نمایش داده شده است. در این شکل سه گام مشخص شده است که به ترتیب عبارتند از: وضعیت اولیه پشته  $A$ ، نحوه قرار گرفتن اعداد در پشته  $B$ ، وضعیت اعداد در پشته  $A$  بعد از عملیات.





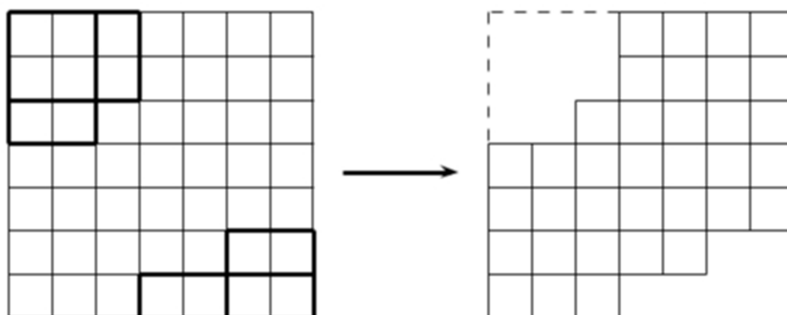
## مرحله دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

### شکلات تخت (۱۵ نمره)

حامد و امیرمهدی یک شکلات تخت به صورت جدولی  $n \times n$  در اختیار دارند. آنها می‌خواهند در حین خوردن شکلات یک بازی نیز باهم انجام دهند. بازی به این صورت است:

حامد از گوشه بالا چپ و امیرمهدی از گوشه پایین راست بازی را شروع می‌کند و به نوبت بازی می‌کنند. اولین حرکت را حامد انجام می‌دهد. هر کس در نوبت خودش باید تکه‌ای مستطیلی (که شامل گوشه خودش باشد) را گاز بزند و حتماً باید یک خانه از شکلات را بخورد (در واقع نمی‌تواند مستطیلی را انتخاب کند که همه خانه‌هایش در نوبت‌های قبلی خورده شده باشند). کسی که آخرین تکه از شکلات را بخورد بازنده است. نشان دهید امیرمهدی همیشه می‌تواند طوری بازی کند که برنده شود.

در شکل زیر حالتی نشان داده شده است که حامد و امیرمهدی هر کدام دو نوبت بازی می‌کنند و در نوبت‌هایشان مستطیل‌های پرنرنگ را می‌خورند. شکل سمت راست شکلات باقی‌مانده پس از این حرکات را نشان می‌دهد.





## مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

### کارت‌های همانی (۲۵ نمره)

سعید ۱۳۹۲ کارت با رنگ‌های متمایز ۱ تا ۱۳۹۲ دارد و می‌خواهد با نوید یک بازی انجام دهد. در این بازی سعید کارت‌ها را دوبار دسته‌بندی می‌کند. او در هر بار دسته‌بندی کارت‌ها را به ۹۹ دسته تقسیم می‌کند به طوری که در هر دسته حداقل یک کارت قرار گیرد. سعید بعد از اینکه دسته‌بندی اول را انجام می‌دهد، دسته‌ها را از ۱ تا ۹۹ شماره‌گذاری می‌کند و پشت هر کارت شماره دسته‌اش را می‌نویسد و سپس برای بار دوم کارت‌ها را دسته‌بندی می‌کند. سعید به نوید قول می‌دهد که در دسته‌بندی دوم هیچ دو کارتی که در دسته‌بندی اول در یک دسته بوده‌اند دوباره در یک دسته قرار نگیرند. بعد از اینکه سعید دسته‌بندی دوم را انجام داد دسته‌ها را به نوید می‌دهد و نوید باید دسته‌ها را از ۱ تا ۹۹ شماره‌گذاری کند و شماره دسته را در طرف دیگر کارت بنویسد. نوید به دنبال بیشینه کردن تعداد کارت‌هایی است که اعداد دو طرفشان با هم برابر باشد و این کارت‌ها را کارت‌های همانی می‌نامد.

الف) نشان دهید سعید هر طور کارت‌ها را دسته‌بندی کند نوید می‌تواند حداقل ۱۵ کارت همانی درست کند. (۱۵ نمره)

ب) نشان دهید سعید می‌تواند طوری کارت‌ها را دسته‌بندی کند که نوید نتواند بیشتر از ۱۵ کارت همانی درست کند. (۱۰ نمره)



## مرحله‌ی دوم بیست و سومین المپیاد کامپیوتر ایران (بخش تشریحی)

### کار گروهی (۳۰ نمره)

آقای امینی معلم کلاسی شامل  $nk$  دانش‌آموز می‌باشد. در این کلاس تعدادی رابطه دوستی بین دانش‌آموزان برقرار است (رابطه دوستی دوطرفه است، یعنی اگر دانش‌آموز  $a$  با دانش‌آموز  $b$  دوست باشد، دانش‌آموز  $b$  هم با  $a$  دوست هست). آقای امینی به کارهای گروهی خیلی علاقه‌مند هست. او می‌خواهد دانش‌آموزان را به  $n$  گروه  $k$  نفری تقسیم کند. اما برای او مهم است که افراد یک گروه همه با هم دوست باشند. ما می‌دانیم حداقل یک راه برای دسته‌بندی دانش‌آموزان با شرایط گفته شده وجود دارد. دانش‌آموزان که از این امر مطلع شده‌اند به دنبال این هستند که دسته‌بندی معلم را از قبل پیش‌بینی کنند.

الف) نشان دهید که اگر تعداد رابطه‌های دوستی برابر با  $n^2 \binom{k}{2}$  باشد، حالتی از روابط دوستی وجود دارد که دسته‌بندی معلم به صورت یکتا مشخص شود. (۱۵ نمره)

ب) نشان دهید که اگر تعداد رابطه‌های دوستی بیشتر از  $n^2 \binom{k}{2}$  باشد، هیچ حالتی نیست که دسته‌بندی بصورت یکتا انجام پذیرد. (۱۵ نمره)