

شما حنا دختری در مزرعه و Δ شما در این آزمون اصلی یکشنبه برابر با ۲۲۹۹۳۹ است!

مسئله اول: زوج مرتب! **۳۰ نمره**

به زوج مرتب (a, b) کوچکتر از k می‌گوییم، اگر هم $a < k$ و هم $b < k$ برقرار باشد. به زوج مرتب (a, b) می‌گوییم x -دوست، اگر حاصلضرب a و b بر x بخشپذیر باشد. $f(x)$ را برابر تعداد زوجهای x -دوست و کمتر از Δ تعریف کنیم.

الف) اگر مقدار $f(1392)$ را M_1 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_1 بر Δ چند است؟ (۷ نمره) پاسخ شما:

ب) فرض کنید t بزرگترین عددی باشد که $\Delta < 2^t$. اگر مقدار $f(2^i)$ را M_2 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_2 بر Δ چقدر است؟ (۱۰ نمره) پاسخ شما:

پ) اگر مقدار $\sum_{i=1}^{\Delta-1} f(i)$ را M_3 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_3 بر Δ چقدر است؟ (۱۳ نمره) پاسخ شما:

مسئله دوم: مجموعه‌ها! **۳۰ نمره**

فرض کنید $U = \{1, 2, \dots, 1000\}$ مجموعه مرجع و A, B, C ، سه زیرمجموعه از U باشند، به طوری که $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$. مجموعه $X \oplus Y$ برابر با مجموعه $(X \cup Y) - (X \cap Y)$ است.

الف) فرض کنید بدانیم $|A \cap B| > 0$ و $C \neq U$. اگر تعداد ۳ تاییهای ممکن (A, B, C) را M_1 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_1 بر Δ چقدر است؟ (۷ نمره) پاسخ شما:

ب) فرض کنید بدانیم $|C| \leq 800$ و $|A \cap B| \geq 200$. اگر تعداد ۳ تاییهای ممکن (A, B, C) را M_2 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_2 بر Δ چقدر است؟ (۱۰ نمره) پاسخ شما:

پ) فرض کنید بدانیم $|A \oplus B| \geq 300$ و $|B \oplus C| \geq 310$ و $|A \oplus C| \geq 320$. اگر تعداد ۳ تاییهای ممکن (A, B, C) را M_3 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_3 بر Δ چقدر است؟ (۱۳ نمره) پاسخ شما:

مسئله سوم: کاهش جایگشت! **۴۰ نمره**

فرض کنید $\langle \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \rangle$ یک جایگشت از اعداد ۱ تا n باشد. عملیات کاهش را روی این جایگشت به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

۱. همه اندیسهای مانند i را پیدا میکنیم که $\pi_i < \pi_{i-1}$ باشد.

۲. همه اندیسهای را که در مرحله ۱ پیدا کردیم را، از جایگشت حذف می‌کنیم.

به عنوان مثال اگر عملیات کاهش را ۳ بار روی جایگشت $\langle 6, 3, 4, 2, 1, 5 \rangle$ انجام دهیم، به یک جایگشت شامل یک عدد ۶ می‌رسیم:

$$\langle 6, 3, 4, 2, 1, 5 \rangle \rightarrow \langle 6, 4, 5 \rangle \rightarrow \langle 6, 5 \rangle \rightarrow \langle 6 \rangle$$

به جایگشت $\langle \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \rangle$ یک جایگشت زیبا می‌گوییم اگر بعد از حداکثر k بار اجرای عملیات کاهش، به یک جایگشت شامل تنها عدد n تبدیل شود. به عنوان مثال اگر $n = 6$ و $k \geq 3$ باشد، جایگشت بالا یک جایگشت زیبا است.

الف) اگر $n = 7$ و $k = 4$ باشد و تعداد جایگشتهای زیبا را M_1 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_1 بر Δ چند است؟ (۸ نمره) پاسخ شما:

ب) اگر $n = 11$ و $k = 5$ باشد و تعداد جایگشتهای زیبا را M_2 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_2 بر Δ چند است (۱۲ نمره) پاسخ شما:

پ) اگر $n = \lfloor \frac{\Delta}{10} \rfloor$ و $k = 200$ باشد و تعداد جایگشتهای زیبا را M_3 بنامیم، باقیمانده تقسیم M_3 بر Δ چند است (۲۰ نمره) پاسخ شما: