پاسخ تشریحی مرحله دوم بیست و پنجمین المپیاد کامپیوتر ایران

فرهاد و علی‌رضا در منهتن! .... ۳۰ امتیاز

□ ابتدا ثابت می‌کنیم کمینه‌ی k برابر ۲ است. ابتدا نشان می‌دهیم کمینه‌ی k نمی‌تواند ۱ باشد. اگر فرهاد تنها یک خانه را انتخاب کند و علی‌رضا پاسخ ۱ به او بدهد، از آن‌جایی که هر خانه دست کم ۲ خانه‌ی مجاور (ضلعی) دارد، پس فرهاد نمی‌تواند به طور یکتا خانه‌ی مورد نظر علی‌رضا را مشخص کند. حال نشان می‌دهیم فرهاد می‌تواند با انتخاب ۲ خانه، به هدفش برسد. فرض کنید فرهاد دو خانه‌ی $(۱, ۱)$ و $(۱, m)$ را انتخاب کند و علی‌رضا برای این دو خانه، به ترتیب پاسخ‌های p و q بدهد. اگر خانه‌ی مورد نظر علی‌رضا (r, c) باشد، باید $r + c = p + ۲$ و $c - r = q - (m - ۱)$ باشد. با حل دو معادله و دو مجهول بالا، r, c به طور یکتا دست می‌آید. ■

□ حال ثابت می‌کنیم تعداد روش‌های انتخاب ۲ خانه، طوری که فرهاد به هدفش برسد، ۴ است. اگر فرهاد دو خانه‌ی گوشه‌ای در طول یک ضلع را انتخاب کند، مانند روش بالا فرهاد می‌تواند به هدفش برسد. حال فرض کنید دو خانه به صورتی دیگر انتخاب شوند و این دو خانه، $(r_۱, c_۱), (r_۲, c_۲)$ باشند. ثابت می‌کنیم فرهاد نمی‌تواند به هدفش برسد. دو حالت داریم:

- فرض کنید این دو خانه، دو خانه در دو گوشه‌ی روبه‌روی جدول باشند. دو خانه‌ی مجاور $(r_۱, c_۱)$ را در نظر بگیرید. اگر علی‌رضا یکی از این دو خانه را انتخاب کند، در هر صورت دنباله‌ی اعدادی که به فرهاد تحویل می‌دهد، یک‌سان است و فرهاد به هدفش نمی‌رسد.

- فرض کنید دست کم یکی از این دو خانه، در گوشه نباشند. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $(r_۱, c_۱)$ در گوشه نباشد. پس حداقل ۳ خانه‌ی مجاور دارد. اگر فاصله‌ی دو خانه‌ی انتخابی فرهاد را d در نظر بگیریم، فاصله‌ی خانه‌ی $(r_۲, c_۲)$ تا ۳ خانه‌ی مذکور تنها می‌تواند $d - ۱$ یا $d + ۱$ باشد. فاصله‌ی این ۳ خانه‌ی مذکور تا $(r_۱, c_۱)$ نیز ۱ است. پس طبق اصل لانه کبوتر، حداقل دو تا از این خانه‌ها هستند که اگر علی‌رضا آن‌ها را انتخاب کند، دنباله‌ی اعداد یک‌سانی به فرهاد تحویل داده می‌شود و فرهاد به هدفش نمی‌رسد.

پس در هر حالت جز ۴ حالت گفته شده، فرهاد نمی‌تواند به هدفش برسد و پاسخ برابر ۴ است. ■

زبان اعصاب! .... ۵۰ امتیاز

الف) کاملن مانند مثال جمع در متن سوال عمل می‌کنیم. اگر $y = ۰$ باشد، $x \times y = ۰$ و در غیر این صورت $x \times y = x \times (y - ۱) + x$ است. پس اگر در عمل‌گر بازگشت، تابع f را برابر تابع z و تابع g را برابر $sum(x, mul(x, y - ۱))$ قرار دهیم، پیاده‌سازی انجام می‌شود. به دست آوردن $x, mul(x, y - ۱)$ جهت

دادن ورودی به تابع sum به راحتی توسط تابع P انجام می‌شود؛ زیرا هر دو مورد در ورودی‌های تابع g موجود هستند. پس داریم:

$$mul(x,y) = PR\big[z, CN[sum, P_1^3, P_3^3]\big]$$

ب) داریم $x^2 + x + 2 = x(x+1) + 2$. ابتدا $x \times (x+1)$ را محاسبه می‌کنیم. برای ساختن $x+1$ باید از تابع inc و برای ساختن $x(x+1)$ باید از تابع mul نوشته شده در قسمت قبل استفاده کنیم و آن‌ها را ترکیب کنیم. پس برای ساختن $x(x+1)$ کافی است تابع

$$tri(x) = CN\big[mul, P_1^1, inc\big]$$

را در نظر بگیریم. حال باید حاصل را با دو جمع کنیم. پس پاسخ برابر

$$f(x) = CN\Big[sum, tri, const_2\Big]$$

ج) ابتدا تابعی مانند $sudoFact(x,y)$ می‌نویسیم که $sudoFact(x,y) = y!$ شود. از عمل‌گر بازگشت استفاده می‌کنیم. اگر $y = 0$ باشد، باید ۱ برگردانده شود؛ پس کافی است در عمل‌گر بازگشت، f را برابر $const_1$ قرار دهیم که در متن سوال پیاده‌سازی شده است. اگر $y = 0$ نباشد، $sudoFact(x,y') = y' \times sudoFact(x,y)$ است. پس تابع g باید y' را در $sudoFact(x,y)$ ضرب کند. پیاده‌سازی زیر برای g این کار را انجام می‌دهد:

$$g\big(x, y, sudoFact(x,y)\big) = CN\Big[mul, P_3^3, CN[inc, P_2^3]\Big]$$

پس تابع $sudoFact$ را می‌توان به شکل زیر، پیاده‌سازی کرد:

$$sudoFact(x,y) = PR\Big[const_1, CN\big[mul, P_3^3, CN[inc, P_2^3]\big]\Big]$$

اکنون فقط کافی است تابع $sudoFact$ را به تابعی با یک ورودی تبدیل کنیم که عمل‌گر $CN[sudoFact, P_1^1, P_1^1]$ این کار را برای ما انجام می‌دهد. پس تابع فاکتوریل را می‌توان به شکل زیر پیاده‌سازی کرد:

$$fact(n) = CN\big[sudoFact, P_1^1, P_1^1\big]$$

د) ابتدا تابع $dec(x)$ را تعریف می‌کنیم که با گرفتن x، عدد $x - 1$ را تحویل می‌دهد. البته در صورتی که $x = 0$ باشد، تابع باید عدد ۰ را تحویل دهد. این تابع به شکل زیر می‌تواند پیاده‌سازی شود:

$$dec(x) = CN\Big[PR\big[z, P_2^3\big], P_1^1, P_1^1\Big]$$

حال تابع $sub(x,y)$ را تعریف می‌کنیم که در آن اگر $x \leq y$ باشد، مقدار ۰ و در غیر این صورت مقدار $x-y$ باید برگردانده شود. با استفاده از تابع dec، تابع sub (تفریق) می‌تواند به شکل زیر پیاده‌سازی شود:

$$sub(x,y) = PR\big[P_1^1, CN[dec, P_3^3]\big]$$

حال تابع $sign(x)$ را تعریف می‌کنیم. اگر $x = 0$ باشد، این تابع عدد ۰ و در غیر این صورت ($x > 0$)، این تابع باید عدد ۱ را برگرداند. این تابع به شکل زیر می‌تواند پیاده‌سازی شود:

$$sign(x) = CN\big[sub, const_1, CN[sub, const_1, P_1^1]\big]$$

حال $\overline{sign}(x)$ را تعریف می‌کنیم که برعکس تابع $sign$ عمل می‌کند؛ یعنی اگر $x = 0$ باشد، مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار ۰ را برمی‌گرداند. این تابع می‌تواند با استفاده از تابع $sign$ به صورت زیر نوشته شود:

$$\overline{sign}(x) = CN\big[sub, const_1, CN[sign, P_1^1]\big]$$

حال تابع خواسته‌شده (min) را پیاده‌سازی می‌کنیم. با تعریف‌های بالا، به راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$min(x,y) = sign(x-y) \times x + \overline{sign}(x-y) \times y$$

$sign(x-y) \times x$ را به صورت

$$case1 = CN\Big[mul, CN\big[sign, CN[sub, P_1^2, P_2^2]\big], P_1^2\Big]$$

و $\overline{sign}(x-y) \times y$ را به صورت مشابه

$$case2 = CN\Big[mul, CN\big[\,\overline{sign}, CN[sub, P_1^2, P_2^2]\big], P_2^2\Big]$$

پیاده‌سازی می‌کنیم. پس:

$$min(x,y) = CN[sum, case1, case2]$$

توپ‌های بهروز .... ۳۵ امتیاز

ثابت می‌کنیم پاسخ برابر $n \times (b - n + 1)$ است.

□ ابتدا ثابت می‌کنیم در هر آرایش، حداقل این تعداد توپ داریم. هر نوع توپی که در نظر بگیرید، باید در حداقل $b - n + 1$ جعبه آمده باشد. برهان خلف می‌زنیم. فرض کنید این طور نباشد. یعنی یک نوع توپ وجود دارد که در حداقل n جعبه نیامده است. آن n جعبه را در نظر بگیرید. نمی‌توان از آن‌ها توپ‌هایی انتخاب کرد که تمام انواع توپ‌ها انتخاب شوند و با فرض مسئله به تناقض می‌رسیم. پس $s \geq n \times (b - n + 1)$ است. ■

□ حال ثابت می‌کنیم آرایشی با $n \times (b - n + 1)$ توپ وجود دارد. حکم را با استقرا روی b ثابت می‌کنیم. برای پایه، حالت $b = n$ را در نظر می‌گیریم. برای هر نوع توپ، یک جعبه‌ی جدا در نظر می‌گیریم و یک توپ از آن نوع در جعبه‌ی مذکور می‌گذاریم. به این ترتیب آرایشی با $n = n \times (b - n + 1)$ توپ ارائه می‌شود. حال فرض کنید حکم برای $b = k$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای $b = k + 1$ نیز برقرار است. یک جعبه را کنار می‌گذاریم و در k جعبه‌ی باقی‌مانده، آرایشی با $n \times (k - n + 1)$ توپ، مطابق فرض استقرا ارائه می‌کنیم. حال در جعبه‌ی کنار گذاشته شده از هر نوع توپ، یکی می‌گذاریم. به این ترتیب یک آرایش مطلوب به دست می‌آید که $n \times (k - n + 2)$ توپ دارد و حکم ثابت می‌شود. ■

بمب‌گذاری واس اوناس! .... ۶۵ امتیاز

الف) ثابت می‌کنیم پاسخ مسئله برابر با

$$\lfloor max_{1 \leq i \leq k} lg(a_k + 1) \rfloor$$

است.

□ ابتدا ثابت می‌کنیم، اگر شکل گراف شهرهای یک کشور، یک مسیر به ترتیب با شهرهای $v_1, v_2, \ldots, v_p$ باشد، حداقل $\lfloor lg(p) \rfloor$ مرحله، لازم است. برای این کار، کافی است ثابت کنیم اگر $p \geq 2^q$ باشد، حداقل q مرحله، لازم است. از استقرای قوی روی p استفاده می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا، $p = 1$ را در نظر می‌گیریم. داریم $p \geq 2^0$ و تعداد مراحل لازم برای انجام کار، ۰ است. فرض کنید حکم برای $p >$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای p نیز برقرار است. فرض کنید در مرحله‌ی ابتدایی، شهر v_i را انتخاب کنیم. اگر $i \leq 2^{q-1}$ باشد؛ ممکن است دستگاه شهر v_{i+1} را نشان دهد، متوجه می‌شویم بمب در یکی از شهرهای $v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_p$ است و طبق فرض استقرا دست کم $q - 1$ مرحله لازم است (زیرا $p - i \geq 2^{q-1}$). پس با یک مرحله‌ی ابتدایی، دست کم q مرحله لازم است و حکم ثابت می‌شود. در حالتی که $i > 2^{q-1}$ نیز به طریق مشابه اثبات انجام می‌شود. ■

□ به روشی مشابه روند بالا، می‌توان به راحتی ثابت کرد برای یک مسیر p رأسی، $\lfloor lg(p) \rfloor$ مرحله کافی نیز هست (روش جست‌وجوی دودویی). ■

□ حال فرض کنید شکل گراف شهرهای یک کشور، به صورت یک دور به طور p باشد. هر رأسی در ابتدا انتخاب شود، نیمی از رأس‌ها حذف می‌شوند و تنها یک مسیر به طور $\lfloor \frac{p}{۲} \rfloor$ باقی می‌ماند. انتخاب هر شهر دیگر به جز این مسیر، اطلاعاتی در مورد شهر بمب‌گذاری شده به ما اضافه نمی‌کند و یک مسیر باقی می‌ماند. پس طبق قسمت قبل، برای یک دور به طول p، کمینه‌ی تعداد مراحل برابر $\lfloor lg(p) \rfloor = \lfloor lg(\frac{p}{۲}) \rfloor + ۱$ است. ■

□ حال ثابت می‌کنیم علی‌رضا و فرهاد، دست کم به

$$\lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(a_k + ۱) \rfloor$$

مرحله در کشور واس‌ماس نیاز دارند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید $a_۱ \geq a_۲, a_۳, \ldots, a_k$ باشد. فرض کنید بمب در یکی از شهرهای استان ۱ باشد و علی‌رضا و فرهاد این اطلاعات اضافه را از ابتدا بدانند. انتخاب هر شهر جز پایتخت و شهرهای استان ۱، پاسخ مشخصی دارد و اطلاعات جدیدی اضافه نمی‌کند. پس یک دور باقی می‌ماند و فرهاد و علی‌رضا طبق قسمت قبل حداقل به

$$\lfloor lg(a_۱ + ۱) \rfloor = \lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(a_k + ۱) \rfloor$$

مرحله نیاز دارند. ■

□ پس فقط کافی است ثابت کنیم

$$\lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(a_k + ۱) \rfloor$$

مرحله برای پیدا کردن بمب کافی است. اگر فرهاد و علی‌رضا در ابتدا پایتخت را انتخاب کنند و پایتخت یکی از شهرهای استان i را به آن‌ها نشان بدهد (بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید شهر شماره ۱ از این استان)، آنگاه بمب در یکی از شهرهای $۱, ۲, \ldots, a_{\lfloor \frac{a_i + ۱}{۲} \rfloor}$ است و طبق قسمت‌های گفته شده می‌توان با حداکثر $\lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(\frac{a_k + ۱}{۲}) \rfloor$ مرحله بمب را پیدا کرد. با احتساب یک مرحله‌ی اولیه، می‌توان نتیجه گرفت با حداکثر

$$\lfloor max_{۱ \leq i \leq k} lg(a_k + ۱) \rfloor$$

می‌توان بمب را پیدا کرد. ■

ب) ثابت می‌کنیم پاسخ برابر r است.

□ ابتدا ثابت می‌کنیم r مرحله برای پیدا کردن بمب، کافی است. آن شهری که کم‌ترین عدد نسبت داده شده را دارد، در ابتدا انتخاب می‌کنیم. سپس در هر مرحله همان شهری را انتخاب می‌کنیم که دست‌گاه به ما نشان می‌دهد. به این ترتیب پس از حداکثر r مرحله، شهر بمب‌گذاری شده پیدا می‌شود (توجه کنید اگر rـامین مرحله انجام شد و هنوز بمب پیدا نشده بود، بمب حتمن در شهر بعدی است و نیازی به چک کردن آن نیست). ■

□ حال ثابت می‌کنیم نقشه‌ای با کمینه‌ی عدد r وجود دارد که حداقل r مرحله نیاز دارد. یک درخت دودویی کامل با ارتفاع r در نظر بگیرید.

با استقرا روی r ثابت می‌کنیم برای پیدا کردن بمب، حداقل r مرحله لازم است. برای پایه‌ی استقرا $r = ۰$ (درخت تک‌رأسی) را در نظر می‌گیریم و حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $r - ۱$ برقرار باشد؛ ثابت می‌کنیم حکم برای r نیز برقرار است.

- اگر در ابتدا ریشه‌ی درخت انتخاب شود، زیردرختی که بمب در آن است، مشخص می‌شود. انتخاب هر شهر از زیردرخت دیگر در ادامه، اطلاعاتی اضافه نمی‌کند؛ زیرا پاسخ آن مشخص است. پس طبق فرض استقرا در ادامه حداقل به $r - ۱$ مرحله نیاز داریم و حکم ثابت می‌شود.
- اما اگر در ابتدا ریشه را انتخاب نکنیم، ممکن است بمب در زیردرخت دیگر باشد. فرض کنید علاوه بر این که بمب، یک شهر را نشان می‌دهد، پس از این انتخاب، این اطلاعات اضافی نیز به علی‌رضا و فرهاد داده شود که بمب در زیردرخت دیگر است. پس انتخاب هر شهر جز زیردرخت دیگر، اطلاعاتی به آن دو اضافه نمی‌کند و پاسخ آن مشخص است. پس طبق فرض استقرا باز هم در ادامه نیاز به حداقل $r - ۱$ مرحله داریم و حکم ثابت می‌شود.

پس ثابت کردیم گرافی داریم که در آن حداقل r مرحله لازم است. ■

پس پاسخ برابر r است.

ج) در هر مرحله، مجموعه‌ی تمام رأس‌هایی که ممکن است بمب در آن‌ها باشد را S در نظر می‌گیریم. واضح است که در ابتدا S مجموعه‌ی تمام شهرهاست. در هر مرحله، آن شهری از S را در نظر می‌گیریم که مجموع فواصلش از دیگر شهرهای درون S، کمینه باشد. این رأس را $v(S)$ می‌نامیم. حال ثابت می‌کنیم با پاسخی که دست‌گاه به ما می‌دهد، می‌توانیم نتیجه بگیریم حداقل نیمی از شهرهای S، نمی‌توانند بمب داشته باشند. به این ترتیب در هر مرحله S حداقل نصف می‌شود و حکم ثابت خواهد شد.

برهان خلف می‌زنیم. فرض کنید یکی از شهرهای مجاور $v(S)$ مانند u انتخاب شود و تعداد شهرهای نامزد برای بمب داشتن، بیش از نصف S بماند. پس u به ازای بیش از $\frac{|S|}{۲}$ شهر، فاصله‌ی کم‌تری از آن شهرها نسبت به $v(S)$ دارد و فاصله‌ی دیگر شهرهای S نیز از u، حداکثر یکی بیش‌تر از فاصله‌ی‌شان از $v(S)$ است. پس مجموع فواصل u از بقیه‌ی شهرهای S در این مرحله کم‌تر بوده است و به تناقض می‌رسیم. پس فرض خلف باطل است و حکم ثابت می‌شود.