

شما دانش پژوه و Δ شما در آزمون اصلی سه شنبه برابر با ۲۲۹۹۳۹ است!

مسئله ی یک: جدول های پیچ پیچ! **۳۱ نمره**

پینگو در گوشه ی بالا و چپ یک جدول $n \times n$ قرار دارد. در این جدول تعدادی از خانه ها مسدود و بقیه ی خانه ها قابل عبور هستند. پینگو می خواهد از گوشه ی بالا و چپ جدول به گوشه ی پایین و راست آن برسد. جهت حرکت اولیه ی پینگو به سمت راست می باشد. پینگو فقط به سمت راست یا پایین حرکت می کند و اجازه دارد حداکثر دو بار جهت حرکت خود را تغییر دهد. جدولی را که پینگو بتواند با محدودیت های فوق از گوشه ی بالا و چپ آن به گوشه ی پایین و راست آن برسد، جدول پیچ پیچ می نامیم. در این مسئله می خواهیم تعداد جدول های پیچ پیچ را از بین همه ی $2^{n \times n}$ جدول ممکن بدست آوریم. دقت کنید که خانه ی بالا و چپ و خانه ی پایین و راست جدول پیچ پیچ باید قابل عبور باشند.

۱- الف (۷ نمره): باقی مانده ی تعداد جدول های پیچ پیچ به ازای $n = 5$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ب (۸ نمره): باقی مانده ی تعداد جدول های پیچ پیچ به ازای $n = 20$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ج (۹ نمره): باقی مانده ی تعداد جدول های پیچ پیچ به ازای $n = 100$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- د (۷ نمره): باقی مانده ی تعداد جدول های پیچ پیچ به ازای $n = 10^6$ بر Δ چند است؟

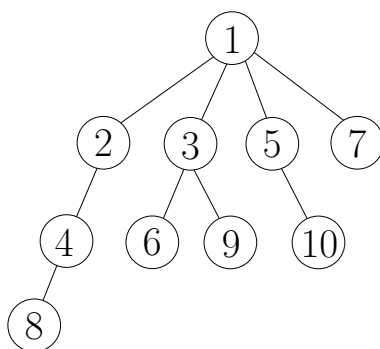
پاسخ شما:

مسئله‌ی دو: اعداد زیبا! **نمره ۳۳**

زینگو یک درخت ریشه‌دار n راسی دارد که راس‌های آن با اعداد $1, 2, \dots, n$ شماره‌گذاری شده‌اند. در این درخت شماره‌ی راس ریشه برابر با ۱ است و شماره‌ی پدر راس $i > 1$ برابر با بزرگترین مقسوم‌علیه عدد i است که از i کوچکتر است. زینگو می‌تواند به تعداد دلخواه هر یک از دو عملیات زیر را بر روی راس‌های این درخت با شماره‌ی $i > 1$ انجام دهد:

۱. در صورتی که i زیبا باشد و راس i فرزندی نداشته باشد، می‌تواند راس i را از درخت حذف کند و در سبد خود قرار دهد. این عملیات هزینه‌ای ندارد.

۲. پدر راس i را به راس دیگری که همچنان در درخت باقی‌مانده است و در زیردرخت راس i نیست، تغییر دهد. این عملیات یک واحد هزینه دارد.



شکل ۱: نمونه‌ی درخت زینگو به ازای $n = 10$

هدف زینگو این است که بیشترین تعداد راس‌هایی که شماره‌ی آنها زیبا است را با صرف کمترین هزینه در سبد خود قرار دهد. اگر زینگو بتواند با k واحد پول، حداکثر x تا از راس‌ها را در سبد خود قرار دهد و برای این کار به حداقل y واحد پول نیاز داشته باشد، در این صورت قرار می‌دهیم $A_k = x \times y$.

۱- الف (نمره ۹): اگر $n = 40000$ باشد و اعدادی که سه مقسوم‌علیه دارند زیبا باشند، باقی‌مانده‌ی $\sum_{k=1}^{150} A_k^2$ بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

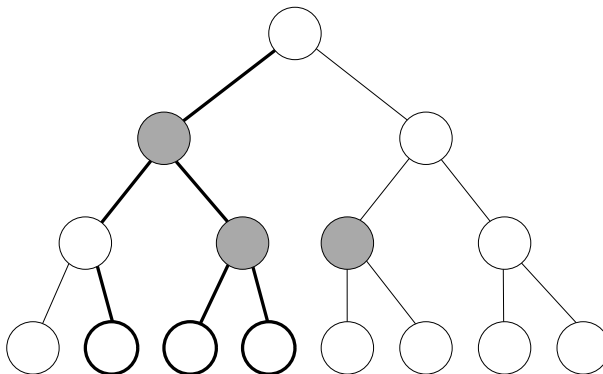
۱- ب (نمره ۸): اگر $n = 10^6$ باشد و اعدادی که دو مقسوم‌علیه دارند زیبا باشند، باقی‌مانده‌ی $\sum_{k=1}^{250000} A_k^2$ بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

۱- ج (نمره ۱۶): اگر $n = 10^6$ باشد و اعدادی که سه یا چهار یا پنج مقسوم‌علیه دارند زیبا باشند، باقی‌مانده‌ی $\sum_{k=1}^{250000} A_k^2$ بر Δ چند است؟ پاسخ شما:

توجه: دقت کنید که بعنوان مثال عدد ۶ دارای ۴ مقسوم‌علیه و عدد ۲۵ دارای ۳ مقسوم‌علیه می‌باشد.

مسئله‌ی سه: باکتری درختی! **۳۶ نمره**

یک درخت دودویی کامل به ارتفاع n داریم که روی ریشه‌ی آن یک باکتری قرار دارد. این باکتری در هر مرحله با احتمال مساوی به فرزند راست یا چپ راسی که در آن قرار دارد، می‌رود. در نتیجه پس از n مرحله به یک برگ می‌رسد. ما می‌توانیم بعضی از راس‌ها را به محل «تقسیم» تبدیل کنیم. اگر یک باکتری وارد راس تقسیم شود به دو باکتری یکسان تبدیل می‌شود و یکی از آنها به فرزند راست و دیگری به فرزند چپ راس تقسیم می‌رود.



شکل ۲: نمونه‌ی یک درخت دودویی کامل به ارتفاع ۳. در این درخت سه راس خاکستری، راس‌های تقسیم هستند. یال‌های پررنگ یک طریقه‌ی ممکن برای حرکت باکتری از ریشه به برگ‌ها را نشان می‌دهند. برگ‌های پررنگ نیز نشان‌دهنده‌ی برگ‌هایی هستند که در انتها درون آنها یک باکتری وجود دارد.

بینگو و پدر بینگو یک بازی روی این درخت انجام می‌دهند. ابتدا پدر بینگو زیرمجموعه‌ی دلخواه t راسی S از برگ‌های درخت را علامت می‌زند. سپس بینگو باید k تا از راس‌های درخت را انتخاب کند و آنها را به محل تقسیم تبدیل کند طوری که اگر باکتری از راس ریشه شروع به حرکت کند، احتمال اینکه در انتها در تمامی راس‌های S یک باکتری وجود داشته باشد، بزرگتر از صفر باشد. دقت کنید راس‌های انتخاب شده توسط بینگو نمی‌تواند شامل برگ‌ها باشد. به ازای زیرمجموعه‌ی S از برگ‌های درخت تعداد راه‌های ممکن برای انتخاب k راس مذکور توسط بینگو را A_S می‌نامیم. اگر F مجموعه‌ی تمام زیرمجموعه‌های t عضو از برگ‌های درخت باشد، در این سوال بدنبال محاسبه‌ی $A = \sum_{S \in F} A_S$ هستیم. به عبارت دیگر A مجموع A_S ‌ها به ازای تمام زیرمجموعه‌های t عضو S از برگ‌های درخت می‌باشد. قرار می‌دهیم $B = A \pmod{(10^9 + 7)}$.

۳-الف (۸ نمره): اگر $n = 5$ ، $t = 5$ و $k = 8$ باشد، باقیمانده‌ی B بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳-ب (۱۳ نمره): اگر $n = 22$ ، $t = 44$ و $k = 88$ باشد، باقیمانده‌ی B بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳-ج (۱۵ نمره): اگر $n = 55$ ، $t = 777$ و $k = 2222$ باشد، باقیمانده‌ی B بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

«پیروز و سربلند باشی دانش‌پژوه جان!»