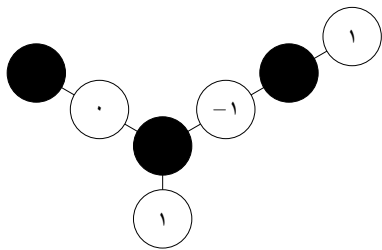


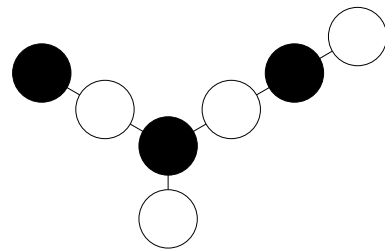
## مرحله دوم بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر ایران

### درخت ساده! ..... ۱۷ امتیاز

پیام یک درخت  $n$  رأسی دارد ( $n \geq 3$ ). او هر رأس این درخت را با یکی از دو رنگ سیاه و سفید رنگ کرده؛ طوری که هر دو رأس مجاور ناهم‌رنگ شده‌اند و همچنین تعداد رأس‌های سفید بیش‌تر از تعداد رأس‌های سیاه شده است. حسام باید روی هر رأس سفید، یکی از اعداد  $1, 0, -1$  را بنویسد؛ طوری که عدد حداقل یک رأس سفید برابر  $0$  نباشد. حسام باید طوری این کار را انجام دهد که به ازای هر رأس سیاه، مجموع اعداد هم‌سایه‌های آن برابر  $0$  شود. برای مثال اگر درخت پیام به شکل (۱) باشد، حسام می‌تواند کارش را مانند شکل (۲) انجام دهد. ثابت کنید درخت پیام به هر شکلی که باشد، حسام قادر به انجام کارهای گفته شده، خواهد بود.



شکل (۲)



شکل (۱)

### دست‌کش‌های مشکوک! ..... ۲۲ امتیاز

حسام یک دست‌کش آبی در دست راست و یک دست‌کش قرمز در دست چپ خود دارد. پیام و حسام یک عدد طبیعی  $n$  انتخاب می‌کنند ( $n \geq 2$ )؛ سپس حسام یک عدد طبیعی  $k$  برمی‌گزیند که  $1 \leq k \leq n$  باشد و پیام باید  $k$  را بفهمد. در هر مرحله پیام می‌تواند یکی از دو پرسش زیر را از حسام بپرسد:

• دست‌کش دست راست تو چه رنگی است؟

• دست‌کش دست چپ تو چه رنگی است؟

حسام در هر پرسش، یکی از دو پاسخ «قرمز» یا «آبی» را می‌گوید. پرسش‌های پیام را به ترتیب با شماره‌های  $1, 2, \dots, q$  شماره‌گذاری کنید. روش پاسخ‌گویی حسام به این صورت است که او پاسخ  $k$  پرسش نخست پیام را به طور دل‌خواه می‌دهد (دروغ یا راست)؛ سپس به ازای هر  $k > i$ ، در پاسخ پرسش شماره‌ی  $i$ ، پاسخ درست پرسش شماره‌ی  $i - k$  را می‌دهد. توجه کنید پاسخ  $k$  پرسش نخست به صورت دل‌خواه داده می‌شود و حسام هیچ روش از پیش تعیین شده‌ای برای پاسخ‌گویی به آن ندارد.

## مرحله دوم بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر ایران

توجه کنید پیام دست‌کش‌های حسام را می‌بیند و هم‌چنین از روش پاسخ‌گویی حسام آگاه است؛ اما  $k$  را نمی‌داند و با توجه به پاسخ‌های حسام باید آن را بفهمد. کمینه‌ی تعداد پرسش‌هایی که پیام باید بپرسد تا به طور تضمینی  $k$  را بفهمد، چیست؟ پاسخ را بر حسب  $n$  بیابید.

### پارکینگ‌های مشکوک! ..... امتیاز ۲۵

آرمان در شرکت خود یک پارکینگ دارد که مدیریت آن را به پیام و حسام، واگذار کرده است. این پارکینگ دارای  $n$  جای‌گاه با شماره‌های  $1, 2, \dots, n$  است. شرکت نیز،  $n$  کارمند با شماره‌های  $1, 2, \dots, n$  دارد. می‌دانیم عدد  $n$  به صورت  $2^k + 1$  است. هر روز این کارمندا طبق دستور حسام برای پارک کردن اتومبیل‌های‌شان طبق الگوریتم زیر عمل می‌کنند:

کارمندا به ترتیب شماره پارک می‌کنند؛ یعنی ابتدا کارمند شماره ۱، سپس کارمند شماره ۲ و ... و در انتها کارمند شماره  $n$  پارک می‌کند. کارمنداى بازار به طرز عجیبی تنوع طلب و البته تنبل هستند! بنابراین هر کارمند در هنگام پارک کردن، مجموعه‌ی جای‌گاه‌های خالی را که تاکنون کم‌تر در آن‌ها رفته است، در نظر می‌گیرد و در میان آن‌ها جای‌گاهی را انتخاب می‌کند که کم‌ترین شماره را دارد.

برای مثال اگر  $n = 3$  باشد، کارمندان در سه روز نخست به ترتیب زیر در جای‌گاه‌ها پارک می‌کنند:

جای‌گاه ۱	جای‌گاه ۲	جای‌گاه ۳	
کارمند ۱	کارمند ۲	کارمند ۳	روز یکم
کارمند ۲	کارمند ۱	کارمند ۳	روز دوم
کارمند ۲	کارمند ۳	کارمند ۱	روز سوم

به روزهایی شماره‌ی تمام کارمندان با شماره‌ی جای‌گاه اتومبیل‌شان یک‌سان باشد، روزهای منظم می‌گوییم! برای مثال روز یکم یک روز منظم است. ثابت کنید بعد از روز یکم، نخستین باری که یک روز منظم دیگر رخ می‌دهد، روز  $n(n-1)+1$  است.

### بازی قهرمانی! ..... امتیاز ۳۶

فرهاد و علی‌رضا یک گراف کامل  $n$  رأسی دارند و با آن بازی می‌کنند. منظور از یک دور همیلتونی در گراف، یک دور به طول  $n$  است. در ابتدا علی‌رضا هر یال گراف را با یکی از دو رنگ قرمز و آبی رنگ می‌کند. سپس فرهاد تعدادی متناهی عمل تعویض انجام می‌دهد. هر عمل تعویض شامل انتخاب کردن یک دور همیلتونی از گراف و تغییر رنگ تمام یال‌های آن دور (از قرمز به آبی و بالعکس) است. توجه کنید تنها نقش علی‌رضا در بازی، رنگ‌آمیزی اولیه‌ی گراف

## مرحله دوم بیست و ششمین المپیاد کامپیوتر ایران

است. فرهاد در کمال هوشمندی می‌خواهد تعداد یال‌های آبی گراف کمینه شود و علی‌رضا می‌خواهد تعداد یال‌های آبی گراف بیشینه شود.

(آ) اگر  $n$  فرد باشد و هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، در انتها چند یال آبی خواهیم داشت؟ (۱۵ امتیاز)

(ب) اگر  $n$  زوج باشد و هر دو نفر به طور بهینه بازی کنند، در انتها چند یال آبی خواهیم داشت؟ (۲۱ امتیاز)

پاسخ را بر حسب  $n$  بیابید.

توجه: فرض کنید پاسخ به دست آمده توسط شما بر حسب  $n$  برابر  $A$  باشد. در هر یک از دو قسمت سوال، در صورتی که  $A$  نادرست باشد، امتیازی به شما تعلق نمی‌گیرد. همچنین در هر یک از دو قسمت سوال، باید دو مورد زیر را در مورد عدد به دست آمده اثبات کنید:

۱. علی‌رضا روشی برای رنگ‌آمیزی دارد که در انتها حداقل  $A$  یال آبی خواهیم داشت.

۲. فرهاد روشی دارد که به ازای هر رنگ‌آمیزی علی‌رضا، در انتها حداکثر  $A$  یال آبی خواهیم داشت.

در هر قسمت درستی  $A$  به تنهایی یک امتیاز و دو مورد بالا به ترتیب در قسمت (آ) ۵ و ۹ امتیاز و در قسمت (ب) ۷ و ۱۴ امتیاز دارند.