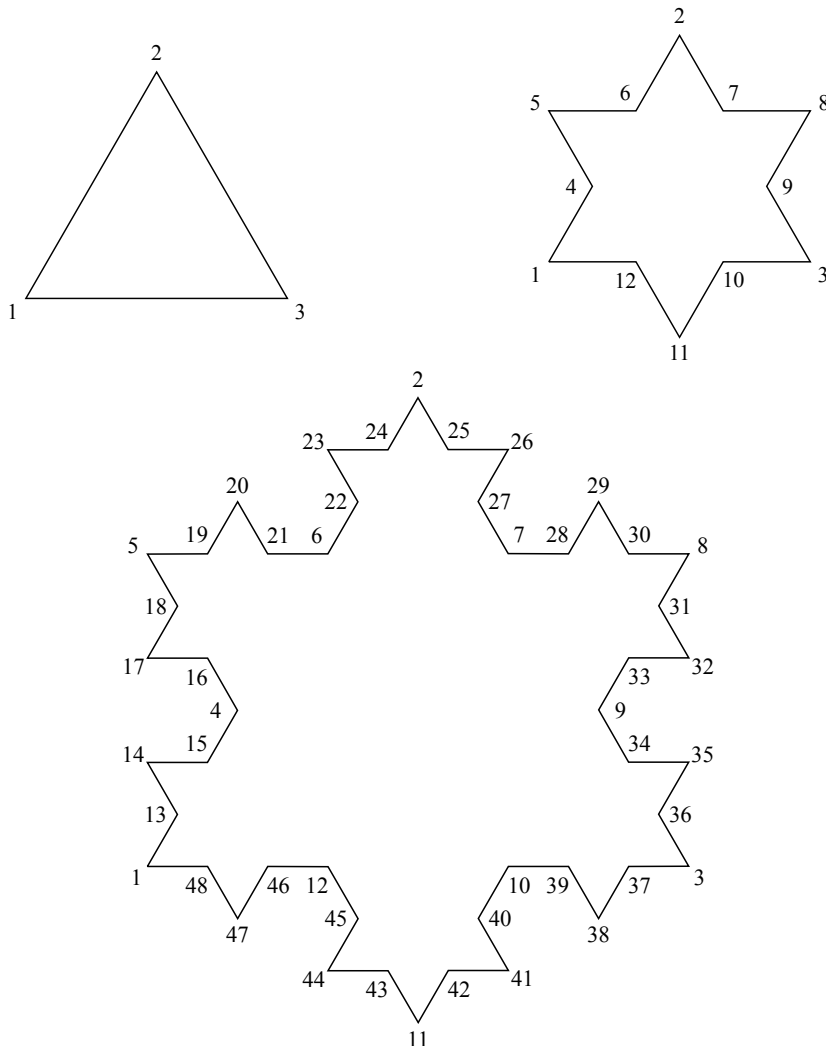


نام و نام خانوادگی شما شنگول گرگ‌زاده اصل و Δ شما در آزمون اصلی روز چهارشنبه برابر با ۲۲۹۹۳۹ است!

مسئله‌ی یک: سوز سرما ۳۳ نمره

هادی به تازگی یک شرکت تاسیس کرده است و قصد دارد ساختمانی برای آن بسازد. با توجه به این‌که هادی می‌خواهد ظاهر ساختمان منحصر به فرد باشد، از معمار خواسته است تا آن را به شکل یک برف‌دانه‌ی کخ بسازد. برف‌دانه‌های کخ به صورت بازگشتی قابل محاسبه هستند. مثلث متساوی الاضلاع اولین برف‌دانه‌ی کخ است. برای ایجاد i امین برف‌دانه‌ی کخ، برف‌دانه‌ی $i - 1$ ام را در نظر می‌گیریم و هر ضلع آن را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم. سپس روی قسمت میانی هر ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع می‌سازیم که راس سوم آن به خارج شکل اشاره کند. در نهایت قسمت میانی را حذف می‌کنیم.



برف‌دانه‌های کخ اول، دوم، و سوم

هادی راس‌های برف‌دانه‌ها را شماره‌گذاری کرده است. او ابتدا به راس‌های اولین برف‌دانه‌ی کخ (مثلث) با شروع از راس دلخواه و با حرکت در جهت ساعت‌گرد، اعداد ۱ تا ۳ را نسبت داده است. حال برای شماره‌گذاری برف‌دانه‌ی i ام، راس‌هایی را که در برف‌دانه‌ی $i - 1$ ام نیز وجود داشتند، با همان شماره‌ی قبلی شماره‌گذاری کرده است. سپس با شروع از راس شماره‌ی یک به صورت ساعت‌گرد، روی رئوس حرکت کرده و با رسیدن به هر راس جدید اولین عدد طبیعی تخصیص داده نشده را به آن تخصیص داده است.

فاصله‌ی بین دو راس i و j در برف‌دانه‌ی n ام را برابر با کمترین تعداد اضلاعی تعریف کرده است که برای رسیدن از راس i به راس j باید پیموده شوند و با $d(n, i, j)$ نشان داده می‌شود. برای مثال $d(1, 1, 3) = 1$ و $d(2, 1, 3) = 4$.

هادی می‌خواهد یکی از برف‌دانه‌ها را برای معماری ساختمان شرکت انتخاب کند. برای این‌کار او در هر برف‌دانه، برخی از راس‌ها را، که از نظرش مهم‌تر از بقیه هستند، انتخاب کرده است و براساس آن‌ها زیبایی معماری را ارزیابی می‌کند. به طور دقیق‌تر، فرض کنید S_n دنباله‌ی شماره‌ی راس‌های مهم در برف‌دانه‌ی n ام باشد و i امین عضو این دنباله را با $S_{n,i}$ نشان دهیم. هادی از شما می‌خواهد $f(n, S_n)$ را محاسبه کنید که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f(n, S_n) = \sum_{i=1}^{|S_n|} \sum_{j=i+1}^{|S_n|} S_{n,i} \times S_{n,j} \times d(n, S_{n,i}, S_{n,j})$$

شما برای کمک به هادی باید به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(4, \{1, 3, 8, 13, 34, 89\})^5$ (به توان پنج توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ب (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(10, \{3^0, 3^1, 3^2, \dots, 3^{12}\})$ بر Δ چند است؟

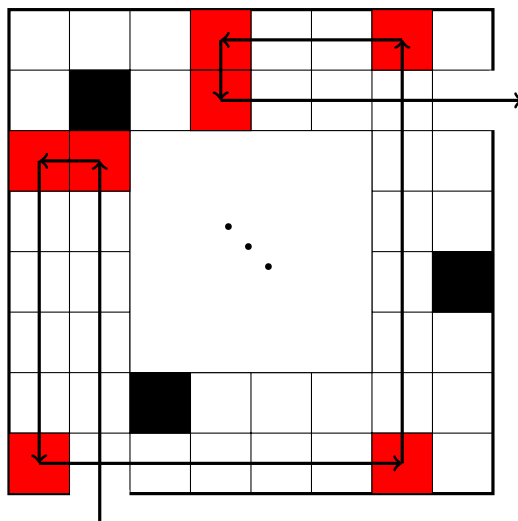
پاسخ شما:

۱- ج (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(28, \{5^0, 5^1, 5^2, \dots, 5^{23}\})$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله‌ی دو: گواهی‌نامه ۳۴ نمره

آزمون گواهی‌نامه‌ی کشور پیچ‌پیچ در یک جدول 50×50 انجام می‌شود. در برخی از خانه‌های این جدول، موانعی قرار داده شده است. یکی از ضلع‌های محیطی جدول برای ورود شرکت‌کننده و یکی دیگر از ضلع‌های محیطی برای خروج او در نظر گرفته شده است. روی سایر ضلع‌های محیطی حصار کشیده شده است. اگر شرکت‌کننده بتواند از ضلع ورودی وارد جدول شده و بدون برخورد به موانع از ضلع خروجی خارج شود، آزمون را با موفقیت پشت سر می‌گذارد. به انتخاب ضلع ورودی، ضلع خروجی و محل موانع چپیش آزمون گفته می‌شود. هلیا، یکی از اهالی پیچ‌پیچ چندین بار در آزمون شرکت کرده است اما موفق به گذراندن آن نشده است. پس از بررسی‌های فراوان، او به این نتیجه رسیده است که توانایی پیچیدن به راست را ندارد و به همین دلیل در آزمون موفق نمی‌شود. محمد می‌خواهد به هلیا کمک کند. او به هلیا قول داده است که در آزمون بعدی پیش از آزمون وارد جدول شود و برخی از خانه‌ها را علامت بزند تا اگر هلیا صرفاً با رسیدن به آن خانه‌ها به سمت چپ پیچد و در سایر موارد به حرکت مستقیم خود ادامه دهد، به مقصد برسد. در شکل زیر که یک علامت‌گذاری موفق را نشان می‌دهد، خانه‌های سیاه دارای مانع هستند و خانه‌های قرمز توسط محمد علامت زده شده‌اند.



به چپیش آزمونی که محمد بتواند به گونه‌ای در آن عمل کند که هلیا با k بار پیچیدن به چپ به مقصد برسد، چپیش k - قرمز می‌گوییم. با توجه به این‌که هلیا مهارت زیادی در پیچیدن به سمت چپ نیز ندارد، محمد می‌خواهد احتمال موفقیت او را تخمین بزند و بنابراین از شما کمک خواسته است تا تعداد چپیش‌های ۱ - قرمز، ۲ - قرمز، و ۳ - قرمز را بشمارید. به او کمک کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

۲- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی تعداد چپیش‌های ۱ - قرمز بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۲- ب (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی تعداد چپیش‌های ۲ - قرمز بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۲- ج (۱۲ نمره): باقی‌مانده‌ی تعداد چپیش‌های ۳ - قرمز بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله‌ی سه: کلید پیرمرد **نمره ۳۳**

پیمان در دوران کودکی بسیار کنجکاو بود. پیرمرد بد اخلاقی همسایه‌ی آن‌ها بود که خانه‌اش بسیار مرموز به نظر می‌رسید و حتی در ورودی آن با یک رمز دیجیتالی باز می‌شد. پیمان علاقه‌ی زیادی به دیدن داخل خانه داشت اما پیرمرد بسیار گوشه‌گیر بود و کسی را به خانه‌اش راه نمی‌داد. پس از اصرار بسیار، پیرمرد قبول کرد تا پیمان و خانواده‌اش را به خانه‌اش دعوت کند اما فقط در صورتی که او بتواند خودش رمز دیجیتالی را محاسبه و وارد کند. پیرمرد نحوه‌ی محاسبه‌ی رمز را به پیمان توضیح داد اما پیمان موفق به محاسبه‌ی آن نشد. حال پس از گذشت سال‌ها، پیمان از شما خواسته است که رمز را برای او محاسبه کنید.

دنباله‌ی تجزیه‌ی عدد x ، دنباله‌ای صعودی از اعداد اول است که حاصل ضرب اعضای آن، x باشد. برای مثال دنباله‌ی تجزیه‌ی عدد ۶۰، $(2, 2, 3, 5)$ است. به طور خاص دنباله‌ی تجزیه‌ی عدد ۱ تهی است. پیرمرد ابتدای هر سال یک عدد n انتخاب می‌کند و با استفاده از آن رمز سال را به صورت زیر تولید می‌کند:

او ابتدا تمام زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی اعداد ۱ تا n را می‌نویسد و سپس برای هر زیرمجموعه، طول پیشوند مشترک دنباله‌های تجزیه‌ی اعضای آن را محاسبه می‌کند. در نهایت برای به دست آوردن رمز، این اعداد را با هم جمع می‌زند.

دنباله‌ی A پیشوند دنباله‌ی B است، اگر و فقط اگر دنباله‌ی A دقیقاً در ابتدای دنباله‌ی B آمده باشد. پیشوند مشترک چند دنباله، بلندترین دنباله‌ای است که پیشوند تمام آن دنباله‌ها باشد. توجه کنید که این دنباله می‌تواند تهی باشد. برای مثال $(1, 2)$ پیشوند دنباله‌ی $(1, 2, 3, 4)$ است اما پیشوند دنباله‌ی $(1, 3, 4)$ نیست. پیشوند مشترک دنباله‌های $(2, 2, 3)$ ، $(2, 3, 3)$ و $(2, 3, 5)$ ، دنباله‌ی تک عضوی (2) است. این دنباله‌ها به ترتیب دنباله‌ی عددهای ۱۲، ۱۸، و ۳۰ هستند و بنابراین به ازای مجموعه‌ی این اعداد، عدد یک در محاسبه‌ی رمز جمع زده می‌شود. همچنین چون پیشوند مشترک دنباله‌های $(2, 3)$ و $(3, 5)$ تهی است، به ازای مجموعه‌ی اعداد ۶، و ۱۵ عدد صفر در محاسبه‌ی رمز جمع زده می‌شود.

فرض کنید رمز حاصل با انتخاب عدد n را با $f(n)$ نشان دهیم. به پیمان کمک کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

۳- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(10)^3$ (به توان سه توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- ب (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(1000)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- ج (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(10^6)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

«پیروز و سربلند باشی هوشنگ جان!»