

نام و نام خانوادگی شما شنگول گرگ‌زاده اصل و Δ شما در آزمون اصلی روز پنج‌شنبه برابر با ۲۲۹۹۳۹ است!

مسئله‌ی یک: شترگاوپلنگ ۳۳ نمره

شتر، گاو، و پلنگ در حال انجام بازی «شترگاوپلنگ» هستند. در این بازی، هر یک از بازیکنان، یک دایره‌ی مخصوص به خود دارد که روی آن دنباله‌ای از اعداد نوشته شده است. در دایره‌ی مربوط به شتر، اعداد ۱ الی ۴۹۷ (شامل عدد ۴۹۷) به صورت ساعت‌گرد نوشته شده‌اند. در دایره‌ی مربوط به گاو، اعداد دایره‌ی شتر با شروع از عدد یک، یکی در میان به صورت ساعت‌گرد نوشته شده‌اند. به همین ترتیب، در دایره‌ی مربوط به پلنگ، اعداد دایره‌ی گاو با شروع از عدد یک، یکی در میان به صورت ساعت‌گرد نوشته شده‌اند. در نتیجه در نهایت دنباله‌ی اعداد روی دایره‌ی شتر ۴۹۶، ۴۹۷، ...، ۲، ۳، ۱، دنباله‌ی اعداد روی دایره‌ی گاو ۴۹۵، ۴۹۷، ...، ۵، ۳، ۱، و دنباله‌ی اعداد روی دایره‌ی پلنگ ۴۹۳، ۴۹۷، ...، ۹، ۵، ۱ است.

در ابتدای بازی هر سه بازیکن روی عدد یک در دایره‌ی خودشان قرار می‌گیرند. سپس در هر مرحله ابتدا هر سه بازیکن عدد خانه‌ای را که رویش ایستاده‌اند، اعلام می‌کنند. سپس اگر عدد خانه‌ی پلنگ مقسوم‌علیه عدد خانه‌ی گاو، و عدد خانه‌ی گاو مقسوم‌علیه عدد خانه‌ی شتر باشد، هم‌زمان فریاد می‌زنند: «هوشنگ!» در نهایت، شتر و پلنگ به عدد بعدی در دایره‌شان در جهت ساعت‌گرد، و گاو به عدد بعدی در دایره‌اش در جهت پادساعت‌گرد می‌روند. برای مثال در مرحله‌ی اول، بازیکنان همه روی عدد یک هستند و بنابراین فریاد می‌زنند. در پایان این مرحله، شتر روی عدد ۲، گاو روی عدد ۴۹۵، و پلنگ روی عدد ۵ است.

حلزون که از تماشای بازی آن‌ها خسته شده بود، تصمیم گرفت به جای تماشای بازی، شماره‌ی مرحله‌ای را به دست آورد که فریاد «هوشنگ» برای i آمین بار شنیده می‌شود. این عدد را با $f(i)$ نشان می‌دهیم. حلزون با وجود تلاش بسیار موفق به حل این مسئله نشد و بنابراین از شما کمک خواسته است. به او کمک کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $(\sum_{i=1}^{100} f(i))^3$ (به توان سه توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ب (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $\sum_{i=1}^{1000} f(i)$ بر Δ چند است؟

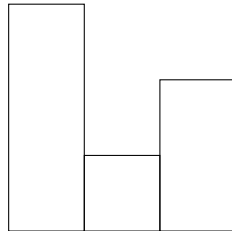
پاسخ شما:

۱- ج (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $\sum_{i=1}^{10^{12}} f(i)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله‌ی دو: کاغذ رنگی **نمره ۳۳**

باشگاه دانش‌پژوهان جوان، به تازگی یک سکوی ویژه برای اهدال مدال‌ها در انتهای دوره‌ی تابستان ساخته است. باشگاه تلاش بسیاری برای فاش نشدن جزییات ظاهری سکو تا پایان دوره‌ی تابستان امسال، انجام داده است. با این وجود، مشخص شده است که سکو از چندین بلوک تشکیل شده است که از چپ به راست در کنار یک‌دیگر چیده شده‌اند که می‌توان به آن‌ها به شکل مستطیل‌هایی به طول واحد نگاه کرد که اضلاع آن‌ها موازی است و در راستای طولشان کنار یک‌دیگر قرار گرفته‌اند.



مشخص شده است که اگر سکو از n بلوک ساخته شده باشد، ارتفاع بلوک‌ها جایگشتی از اعداد ۱ تا n است اما هیچ اطلاعاتی درباره‌ی ترتیب آن‌ها منتشر نشده است. علاوه بر این تعداد بلوک‌ها (مقدار n) نیز نامشخص است. باشگاه قصد دارد این سکو را با کاغذ رنگی تزیین کند اما برای سادگی در انجام تعمیرات، محدودیت‌هایی برای این‌کار در نظر گرفته است:

- هر کاغذ رنگی باید به شکل یک مستطیل با اضلاع موازی با بلوک‌ها باشد.
- هر کاغذ رنگی باید تنها یک واحد مربع از هر بلوک را بپوشاند و ارتفاع آن دقیقاً برابر با یک واحد باشد.
- تمام مساحت کاغذ رنگی‌ها باید کاملاً روی سکو باشد.
- هر نقطه از سکو باید توسط دقیقاً یک کاغذ رنگی پوشانده شود.

باشگاه همچنین قصد دارد محدودیتی برای طول کاغذ رنگی‌ها در نظر بگیرد اما هنوز مقدار آن را مشخص نکرده است.

باشگاه می‌خواهد فرآیند تزیینات با کمترین تعداد کاغذ رنگی انجام شود اما از آن‌جا که نمی‌خواهد اطلاعاتی راجع به سکو فاش کند، تصمیم گرفته است مسئولیت را به باهوش‌ترین فرد واگذار کند. فرض کنید سکو n بلوک داشته باشد. به ازای هر یک از $n!$ حالت چینش بلوک‌ها، کمترین تعداد کاغذ رنگی برای تزیین سکو مطابق شرایط گفته شده، و حداکثر طول کاغذ رنگی k را محاسبه می‌کنیم و اعداد حاصل را با هم جمع می‌زنیم. عدد حاصل را با $f(n, k)$ نشان می‌دهیم. برای مثال $f(2, 2) = 4$. باشگاه از داوطلبان خواسته است تا مقادیر این تابع را برای ورودی‌های مختلف محاسبه کنند.

یکی از داوطلبان که از بهترین دوستان شما است، از شما کمک خواسته است. به او کمک کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

۲- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(10, 4)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۲- ب (۱۱ نمره): باقی مانده‌ی $f(100, 43)$ بر Δ چند است؟

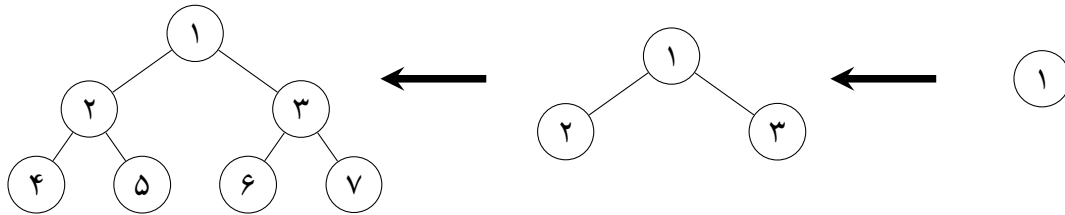
پاسخ شما:

۲- ج (۱۱ نمره): باقی مانده‌ی $f(10000, 400)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله‌ی سه: درخت‌کشی ۳۴ نمره

علی تصمیم گرفته است یک درخت ریشه‌دار دودویی رسم کند. او در مرحله‌ی اول یک راس روی کاغذ رسم می‌کند و شماره‌ی ۱ را به آن نسبت می‌دهد. سپس در هر یک از مراحل بعدی، به ازای هر راس درخت مرحله‌ی قبل، مانند راس شماره‌ی x ، که درجه‌ی آن کوچک‌تر یا مساوی یک است، دو راس جدید اضافه می‌کند و آن‌ها را به راس شماره‌ی x متصل می‌کند. سپس به یکی از دو راس جدید، شماره‌ی $2x$ ، و به دیگری شماره‌ی $2x + 1$ را نسبت می‌دهد.



درخت رسم شده پس از مرحله‌ی اول، دوم، و سوم

از نظر علی، سرسبزی یک درخت، برابر با AND بیتی اعداد راس‌های آن است. به عبارت دیگر، سرسبزی یک درخت عددی است که اگر در مبنای دو نوشته شود، تنها در مکان‌هایی رقم یک دارد که نمایش مبنای دوی تمامی عددهای راس‌های درخت، در آن مکان‌ها، رقم یک داشته باشند. برای مثال سرسبزی درخت رسم شده پس از دو مرحله، صفر است. از طرفی سرسبزی زیردرختی از آن که تنها شامل رئوس یک و سه است، برابر با یک است. علی زیبایی یک درخت را برابر با مجموع سرسبزی تمام زیرگراف‌های همبند آن تعریف می‌کند و زیبایی درخت رسم شده بعد از n مرحله را با $f(n)$ نمایش می‌دهد. برای مثال $f(1) = 1$ و $f(2) = 7$. علی می‌خواهد بداند تا چند مرحله به رسم درخت ادامه دهد و بنابراین از شما می‌خواهد به سوالات زیر پاسخ دهید.

۳- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(4)^3$ (به توان سه توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- ب (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(16)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- ج (۱۲ نمره): باقی‌مانده‌ی $f(64)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

«پیروز و سربلند باشی هوشنگ جان!»