



آزمون اصلی روز اول مرحله سوم (۱۳۹۸/۰۴/۱۸)

- مدت زمان آزمون، ۲۱۰ دقیقه است.
- برای وارد شدن به کامپیوترها از نام کاربری 1-day1 و رمز عبور jomjome استفاده کنید.
- برای هر قسمت از هر سوال، مجاز به حداکثر ۳۰ ارسال به سامانه داوری هستید.
- حتما پاسخ‌هایتان را در مکان مشخص شده بر روی برگه‌ی سوال‌ها بنویسید.

مسئله‌ی یک: پادشاه **نمره ۳۳**

سروش به تازگی به دنباله‌های «پادشاه» علاقه‌مند شده است. دنباله‌ی پادشاه، دنباله‌ای از اعداد طبیعی است که در آن هر عدد، مقسوم علیه عدد بعدی خود در دنباله است. برای مثال دنباله‌ی ۲, ۲, ۴, ۸ یک دنباله‌ی پادشاه به طول ۴ است اما دنباله‌ی ۲, ۴, ۲, ۶ دنباله‌ی پادشاه نیست.

تعداد دنباله‌های پادشاه به طول k که تمام عناصر آن کمتر یا مساوی n هستند را با $f(n, k)$ نشان می‌دهیم. سروش می‌خواهد روشی برای محاسبه‌ی این تابع ارائه دهد تا علاقه‌اش به این دنباله‌ها را اثبات کند. اما برای اطمینان از درستی روش خود، به دانستن مقادیر تابع برای برخی از ورودی‌ها نیاز دارد و بنابراین از شما کمک خواسته است تا این مقادیر را محاسبه کنید.

با توجه به بزرگی این مقادیر، او تابع کمکی $g(n, k)$ را برابر باقی‌مانده‌ی $f(n, k)$ بر $10^9 + 7$ تعریف کرده است و از شما می‌خواهد تا صرفاً مقادیر تابع g را محاسبه کنید. برای کمک به او، به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱- الف (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $g(50, 3)^3$ (به توان سه توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ب (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $g(10^5, 100)^3$ (به توان سه توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۱- ج (۱۱ نمره): باقی‌مانده‌ی $g(10^5, 10^6)^3$ (به توان سه توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله‌ی دو: خلمپیاد **نمره ۳۳**

به یک درخت ریشه‌دار دودویی، کامل می‌گوییم اگر و فقط اگر هر راس یا فرزندی نداشته باشید یا دقیقاً دو فرزند داشته باشد. همچنین در این گونه از درخت‌ها، ترتیب فرزندان مشخص است و بنابراین بچه‌ی چپ از بچه‌ی راست قابل تشخیص است.

فاطمه، مدیر کارخانه‌ی خاک پای المپیاد (به اختصار «خلمپیاد») است. به جز فاطمه، هر یک از کارمندان دقیقاً یک رییس دارند. اگر به ازای هر یک از کارمندان یک راس گذاشته و بین راس متناظر هر کارمند با راس متناظر رییس او، یک یال بگذاریم، گراف حاصل یک درخت دودویی کامل است.

در خلمپیاد، به کارمندانی که رییس هیچ فردی نیستند، «دانش‌پژوه» و به سایر کارمندان، «مسئول» گفته می‌شود. همچنین هر یک از کارمندان سطح مشخصی دارد. سطح فاطمه صفر است. سطح هر یک از کارمندان یکی بیشتر از رییشان است. در خلمپیاد سطح تمامی دانش‌پژوهان با هم برابر است. همچنین دانش‌پژوهان از چپ به راست و با شروع از صفر شماره‌گذاری شده‌اند. بنابراین اگر سطح دانش‌پژوهان n باشد، شماره‌ی هر دانش‌پژوه عددی حسابی بین 0 تا $2^n - 1$ است.

فاطمه می‌خواهد یک راه ارتباطی مستقیم بین دانش‌پژوهان و خودش برقرار کند تا از این طریق آن‌ها بتوانند مشکلاتشان را با او در میان بگذارند. طبق برنامه‌ی فاطمه، در یک روز مشخص، هر یک از دانش‌پژوهان می‌تواند در صورت تمایل، یک نامه به رییس خود تحویل دهد. در روز i ام پس از تحویل نامه‌ها، هر یک از مسئولین سطح $n - i$ ، ابتدا اگر تعداد نامه‌هایی که روز قبل به دستشان رسیده است از k بیشتر باشد، تا زمانی که کمتر از k نامه باقی بماند، k تا از نامه‌ها را به صورت تصادفی دور می‌اندازد. سپس نامه‌های باقی‌مانده را به رییس خود تحویل می‌دهد. توجه کنید که ممکن است یک مسئول تمامی نامه‌هایی که دریافت کرده را دور بیندازد.

در نهایت فاطمه نیز مانند سایر مسئولین تا زمانی که تعداد نامه‌ها به کمتر از k برسد، آن‌ها را در دسته‌های k تایی دور می‌اندازد. در نهایت نامه‌های باقی‌مانده را می‌خواند.

فرض کنید A مجموعه‌ی شماره‌ی دانش‌پژوهانی باشد که برای فاطمه نامه می‌نویسند. مجموعه‌ی طلایی A ، زیرمجموعه‌ای از A شامل شماره‌ی دانش‌پژوهانی است که فاطمه حتماً نامه‌ی آن‌ها را می‌خواند. به عبارت دیگر نامه‌ی آن‌ها مستقل از نحوه‌ی دور ریختن نامه‌های اضافی توسط کارمندان به دست فاطمه می‌رسد و فاطمه نیز آن‌ها را دور نمی‌ریزد. توجه کنید که این مجموعه می‌تواند تهی باشد. مجموعه‌ی طلایی A را با $f(A)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید $C = \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ مجموعه‌ی شامل شماره‌ی تمامی دانش‌پژوهان باشد. $g(B)$ را تعداد مجموعه‌های $A \subseteq C$ تعریف می‌کنیم که $B \subseteq f(A)$.

فاطمه برای سنجش کارایی برنامه‌اش، از شما کمک خواسته است تا مقدار $g(B)$ را حساب کنید. با توجه به بزرگ بودن این مقدار، او پذیرفته است که شما در عوض، مقدار $h(B)$ را محاسبه کنید که باقی‌مانده‌ی $g(B)$ بر $7 + 10^9$ است. به فاطمه کمک کنید و به سوالات زیر پاسخ دهید.

۲- الف (۱۱ نمره): اگر $n = 20$ و $k = 10$ ، باقی مانده‌ی $h(\{0\})^3$ (به توان سه توجه کنید) بر Δ چند است؟
پاسخ شما:

۲- ب (۱۱ نمره): اگر $n = 10^6$ و $k = 11$ ، باقی مانده‌ی $h(\{0, 10^5\})^3$ (به توان سه توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۲- ج (۱۱ نمره): اگر $n = 1000$ و $k = 11$ ، باقی مانده‌ی $(\sum_{B \subseteq C} h(B))^3$ (به توان سه توجه کنید) بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

مسئله ی سه: اثر بستنی **نمره ۳۴**

کمیته ی ملی المپیاد کامپیوتر می خواهد برای دانش پژوهان خود یک بستنی فروشی ویژه بسازد. اعضای کمیته تصمیم گرفته اند بستنی فروشی را به شکل n سکوی کنار هم بسازند. همچنین از نظر آن ها ضروری است که دنباله ی ارتفاع سکوها جایگشتی از اعداد ۱ تا n باشد.

در حال حاضر کمیته با k شرکت بستنی فروشی قرارداد بسته است و قصد دارد به هر یک، غرفه ای اختصاص دهد. از نظر کمیته، غرفه ها باید در سکوهایی بنا شوند که همچنین ارتفاعشان از سکوهای مجاورشان بیشتر باشد. توجه کنید که سکوهای ابتدا و انتها تنها یک سکوی مجاور دارند و کافی است از همان سکو بلندتر باشند تا بتوان در آن ها بستنی فروشی ساخت. همچنین کمیته می خواهد در تمامی سکوهایی که خاصیت های گفته شده را دارند، دقیقاً یک غرفه بنا شود. بنابراین تعداد سکوهای با خاصیت گفته شده باید دقیقاً برابر k باشد. حال کمیته از شما خواسته است تعداد دنباله های ممکن برای ارتفاع سکوها را محاسبه کنید که تمام شرایط گفته شده را دارند. این مقدار با $f(n, k)$ نمایش داده می شود. شما باید به سوالات زیر پاسخ دهید.

۳- الف (۱۱ نمره): باقی مانده ی $f(50, 10)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- ب (۱۱ نمره): باقی مانده ی $f(1000, 150)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما:

۳- ج (۱۲ نمره): باقی مانده ی $f(10^4, 1500)$ بر Δ چند است؟

پاسخ شما: