- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۰ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ فرض کنید a و b دو دنباله به طول n و از اعداد صحیح نامنفی باشند. منظور از $a+b$ دنباله‌ای به طول n است که عنصر iاُم آن حاصل‌جمع عنصرهای iاُم در a و b است ($1 \leqslant i \leqslant n$). به زوج مرتب (a,b) **جایگشت ساز** می‌گوییم اگر و تنها اگر دنباله‌ی $a+b$ جایگشتی از اعداد ۱ تا n باشد. تعداد زوج مرتب‌های (a,b) جایگشت‌ساز به طول ۱۰ را بیابید که هر دو دنباله‌شان ناصعودی باشند. یک دنباله ناصعودی است اگر هر عضو از دنباله کوچک‌تر مساوی عضو پیشین باشد.

۱) ۵۸۷۸۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۱۱ ۵) ۵۶۳۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

با توجه به اینکه هر دو دنباله نا صعودی هستند می‌توان نتیجه گرفت که دنباله‌ی c نیز ناصعودی است. با توجه به اینکه c جایگشتی از اعداد ۱ تا n است، دنباله‌ی c به شکل $n, n-1, n-2, ..., 2, 1$ است.
دو حالت برای انتخاب a_n و b_n وجود دارد که کدام‌یک ۱ و دیگری ۰ باشد. همچنین برای هر اندیس i از $n-1$ تا ۰ می‌دانیم که $a_i \geqslant a_{i+1}$، $b_i \geqslant b_{i+1}$ و $c_i = c_{i+1} + 1$. پس دو حالت وجود دارد که مقدار یکی که نسبت به c_{i+1} به اندیس i اضافه شده است، به کدام یک از دو دنباله اضافه شود. پس در مجموع $2 \times 2^{n-1} = 2^n$ حالت وجود دارد. □

۲ ناخدا و ۵ نفر از ملوانانش سر یک میز دایره‌ای نشسته‌اند. هر کدام از افراد دور میز به احتمال $\frac{1}{2}$ کرونا دارند. پس از هر یک ساعت اگر فردی مریض باشد هر دو نفر کناریش را مریض می‌کند. چه قدر احتمال دارد پس از ۲ ساعت همه‌ی افرادی که دور میز نشسته‌اند مبتلا شده باشند؟

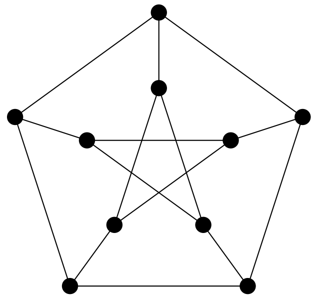
۱) $\frac{57}{64}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{63}{64}$ ۴) $\frac{3}{16}$ ۵) $\frac{21}{32}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

- در ابتدا هیچ کس کرونا نداشته باشد: در اینصورت هیچ کس در انتها کرونا ندارد. احتمال این رخداد $\frac{1}{2}^6 = \frac{1}{64}$ است.
- در ابتدا یک نفر کرونا داشته باشد: در این‌صورت پس از گذشت دو ساعت فرد روبروی فرد مبتلای اولیه چون فاصله‌ی ۳ دارد مبتلا نشده است. احتمال این رخداد $6 \times \frac{1}{2} = \frac{6}{64}$ است.
- در ابتدا حداقل دو نفر کرونا داشته باشند: در این صورت پس از گذشت دو ساعت همه افراد کرونا دارند چون فاصله هر کس تا فرد مبتلا کمتر مساوی ۲ است. احتمال این رخداد $\frac{57}{64} = \frac{6}{64} - \frac{1}{64} - 1$ است.

پس احتمال اینکه همه افراد در انتها کرونا داشته باشند برابر است با احتمال اینکه در ابتدا حداقل ۲ نفر کرونا داشته باشند. این احتمال $\frac{57}{64}$ می‌باشد. □

۳ پترسن می‌خواهد روی هر رأس از گراف زیر عددی صحیح و بزرگ‌تر از ۱ قرار دهد.



یک عددگذاری **پایدار** است اگر هر جفت رأس همسایه اعدادشان نسبت به هم اول باشند. پترسن می‌خواهد طوری عددگذاری کند که هم پایدار باشد و هم مجموع اعداد گذاشته شده کمینه باشد. مجموع اعدادی که روی گراف می‌نویسد چه‌قدر است؟

۱) ۳۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴ ۵) ۳۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

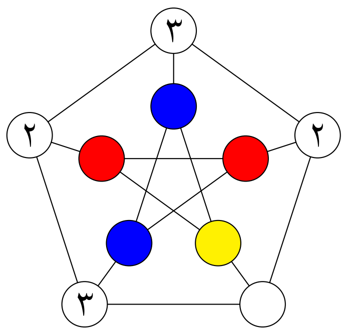
لم ۱: در حالت بهینه روی هر خانه یک عدد اول قرار می‌گیرد. اگر حالت بهینه‌ای وجود دارد که عددی در آن اول نیست، آن عدد را تقسیم بر یکی از عوامل اولش می‌کنیم. همچنان هر دو همسایه نسبت به هم اول هستند اما مجموع کاهش یافته است.

لم ۲: اگر از عدد اول i تعداد c_i تا داشته باشیم. اگر $x < y$ باشد آنگاه $c_x \geqslant c_y$. اگر حالت بهینه این خلاف شرایط ذکر شده وجود داشته باشد اگر مقادیر تمامی رئوس x و y را برعکس کنیم (یعنی اگر x بود y و اگر y بود x کنیم). آنگاه مجموع کاهش می‌یابد چون $x < y, c_x < c_y \implies x \times c_x + y \times c_y > x \times c_y + y \times c_x$

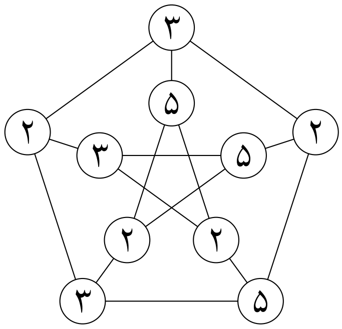
برای ادامه اثبات دو دور از گراف پترسن را در نظر می‌گیریم. یکی دور بیرونی که به شکل پنج‌ضلعی است. دیگری دور درونی که به شکل ستاره است.

لم ۳: در عددگذاری بیش از ۴ راس با یک عدد وجود ندارد. اگر حداقل ۵ راس با یک عدد داشته باشیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۳ تا از آن‌ها در یک دور و از میان آن‌ها ۲ تا کنار هم هستند. پس دوعدد وجود دارد که نسبت به هم اول نخواهند بود.

لم ۴: در عددگذاری نمی‌توان دو عدد داشت که هر یک روی ۴ راس نوشته شده باشند. در هر دور از هر عدد دوتا داریم (در هر دور ۳ تا از یک عدد نداریم). فرض کنید اعداد ۲ و ۳ باشند. بدون کم شدن از کلیت فرض کنید اعداد در دور بیرونی مطابق شکل زیر قرار گرفته‌اند. می‌دانیم در دایره‌های آبی تنها یک عدد ۲، در دایره‌های قرمز تنها یک عدد ۳ و در دایره زرد می‌توان ۲ یا ۳ نوشت. پس سه عدد می‌توان نوشت. پس نمی‌توان چهار عدد ۲ و ۳ در خانه‌های دور درونی قرار داد.



طبق لم ۱، ۲ هر حالت معتبر را می‌توان با یک دنباله نزولی $c_2, c_3, c_5, \ldots$ نشان داد که تعداد موجود از هر عدد اول را مشخص می‌کند.طبق لم ۳ و ۴ اعداد کوچک تر مساوی ۴ است و حداکثر یک عدد ۴ داریم. مطابق گراف زیر می‌دانیم دنباله‌ی $c = 4, 3, 3, 0, 0, \ldots$ معتبر است:



به ازای هر دنباله معتبر دیگر می‌دانیم هر یک از سه عنصر اول، از متناظر آن‌ها در دنباله c کوچک‌تر مساوی است، پس مجموع اعداد استفاده شده در هر حالت دیگر کمتر نخواهد بود. پس جواب ۳۲ است. □

۴ جدولی $n \times n$ داریم که سطرهای آن از بالا به پایین و ستون‌های آن از چپ به راست با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. خانه‌ی واقع در سطر i و ستون j را با (i, j) نشان می‌دهیم. می‌خواهیم از خانه‌ی $(۱, ۱)$ به خانه‌ی (n, n) برویم. حرکت‌های مجاز به صورت زیر هستند:

- حرکت از (i, j) به $(i + ۱, j)$ با هزینه‌ی j.
- حرکت از (i, j) به $(i, j + ۱)$ با هزینه‌ی i.

چند مسیر مجاز دارای کم‌ترین هزینه هستند؟

۱) $\binom{۲n}{n}$ ۲) ۲ ۳) n ۴) $\binom{۲n-۲}{n-۱}$ ۵) $\frac{۱}{۲}\binom{۲n}{n}$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

ادعا می‌کنیم تمام مسیرها هزینه‌ی یکسانی دارند. برای خانه‌ی (i, j) پتانسیل $i \cdot j$ را تعریف می‌کنیم. توجه کنید در هر حرکت دقیقاً به اندازه‌ی هزینه‌ی آن مرحله به مقدار پتانسیل اضافه می‌شود. در ابتدا مقدار پتانسیل ۱ و در انتها مقدار پتانسیل $n^۲$ می‌رسد. بنابراین همه‌ی راه‌ها دارای هزینه‌ی $n^۲ - ۱$ هستند. □

۵ شنگدباو یک کوالای خوشحال دارد. او سه سکو دور یک دایره با فاصله‌های برابر قرار داده است که با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ در جهت ساعت‌گرد شماره‌گذاری شده‌اند. در ابتدا کوالا روی سکوی ۱ قرار دارد. این کوالای خوشحال در هر دقیقه به احتمال $\frac{۱}{۲}$ به سکوی بعدی در جهت ساعت‌گرد می‌پرد، به احتمال $\frac{۱}{۴}$ به سکوی بعدی در جهت پادساعت‌گرد می‌پرد و به احتمال $\frac{۱}{۴}$ سر جای خود می‌ماند. حالا شنگدباو با خود می‌اندیشد پس از ۱۳۹۹ دقیقه کوالا در کدام سکو به احتمال بیشتری می‌نشیند.

۱) احتمال نشستن در سکوهای ۱ و ۲ برابر است و از سکوی ۳ بیشتر است.
۲) احتمال نشستن روی سکوی ۱ از دو سکوی دیگر بیشتر است.
۳) احتمال نشستن در سکوهای ۱ و ۳ برابر است و از سکوی ۲ بیشتر است.
۴) احتمال نشستن روی سکوی ۳ از دو سکوی دیگر بیشتر است.
۵) احتمال نشستن روی سکوی ۲ از دو سکوی دیگر بیشتر است.

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

فرض کنید کوالا یک تاس عجیب دارد که هر بار عددی بین ۱ تا ۴ را با احتمال برابر نشان می‌دهد. او هر دقیقه این تاس را می‌اندازد و به اندازه‌ی عدد آن تاس، ساعتگرد روی سکوها حرکت می‌کند. این روش همان احتمال‌های مطرح شده در صورت سؤال را تولید می‌کند(؟). با این روش کوالا ۱۳۹۹ بار تاس می‌ریزد و نهایتا به اندازه‌ی مجموع اعداد تاس‌ها، ساعتگرد روی سکوها حرکت می‌کند. پس کافیست بین همه‌ی حالات مختلف

تاس انداختن، ببینیم در بین مجموع اعداد تاس‌ها کدام باقی‌مانده‌ی بر ۳ بیشتر تولید می‌شود.
مسئله معادل می‌شود با اینکه بین همه‌ی اعداد ۱۳۹۹ رقمی با ارقام ۱ تا ۴، کدام باقی‌مانده‌ی ۳ بیشتر تولید شده است. حال برای عدد n، راست‌ترین رقمی که ۴ نیست را بگیرید. اگر این رقم را به ارقامی غیر از ۴ تغییر دهید، ۲عدد دیگر بدست می‌آید. این ۳ عدد را با هم در یک دسته بگذارید. با این روش همه‌ی اعداد جز عددی که همه‌ی ارقامش ۴ است دسته‌بندی می‌شوند. در هر دسته یکی بر ۳ بخش‌پذیر است، یکی باقی‌مانده‌ی ۱ دارد و دیگری باقی‌مانده‌ی ۲. پس پرتکرارترین باقی‌مانده، باقی‌مانده‌ی ۴۴۴۴...۴۴۴ بر ۳ است که برابر ۱ است. در نتیجه احتمال نشستن کوالا روی سکوی ۲ بیشتر از دو سکوی دیگر است. □

۶ علی از طرف عموی برنامه‌نویسش یک دستورالعمل «آرایه‌ساز» و یک آرایه‌ی ۸ خانه‌ای هدیه گرفته است. این دستورالعمل به صورت زیر کار می‌کند:

۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰

۱. درون همه‌ی خانه‌های آرایه عدد ۰ را بنویس.
۲. مقدار i را برابر با ۰ قرار بده.
۳. مقدار i را $i+۱$ قرار بده.
۴. i خانه‌ی متوالی در آرایه را به صورت تصادفی انتخاب کن. به اعداد درون همه‌ی این i خانه یک واحد اضافه کن.
۵. اگر i کوچکتر از ۸ است به مرحله‌ی ۳ بازگرد.
۶. پایان.

این دستورالعمل یک آرایه‌ی ۸ عضوی را به‌صورت تصادفی می‌سازد. از آن‌جا که علی این روزها به «جایگشت» علاقه‌مند شده است، فقط وقتی خوشحال می‌شود که دستورالعمل جایگشتی از اعداد ۱ تا ۸ خروجی بدهد. علی به چه احتمالی خوشحال می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۲^۷}{۸!}$ ۳) $\frac{۲^۷}{۷!}$ ۴) $\frac{۲^۸}{۸!}$ ۵) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

هر مرحله یک بازه از آرایه با عدد ۱ جمع بسته می‌شوند. هر یک از این بازه‌ها را با طولشان نام گذاری می‌کنیم.
بازه x درون بازه‌ی y هست اگر اجتماع‌خانه‌هایی که می‌پوشانند برابر با خانه‌های بازه y باشد.
به استقرا می‌توان ثابت کرد اگر مطابق الگوریتم بازه‌های ۱ تا n را با هم جمع کنیم و دنباله‌ی نهایی جایگشت باشد، به ازای هر جفت بازه، بازه‌ی کوچک‌تر درون بازه‌ی بزرگ‌تر است(؟).
چون اضافه کردن بازه‌ها مستقل از هم انجام می‌شود می‌توان ترتیب اعمال بازه‌ها رو برعکس کرد. با توجه به اینکه هر بازه باید داخل بازه‌های بزرگ‌تر از خود باشد، به ازای هر بازه با طول کمتر از ۸ تنها ۲ حالت می‌تواند به حالت معتبر ختم شود. پس تعداد حالت‌های معتبر $۲^۷$ است. تعداد کل حالات نیز $۸!$ است. چون بازه به طول i می‌تواند در $۸-i+۱$ حالت مختلف به آرایه اضافه شود. □

۷ هفته‌ی گذشته در سیسیل ایتالیا، جزیره‌ی خانواده‌های مافیایی، پسر دون کورلئونه به قتل رسید. دون کورلئونه همه‌ی پدرخوانده‌های خانواده‌های مافیایی را به یک جلسه‌ی اضطراری دعوت کرده است. از آن‌جایی که همه‌ی آن‌ها مشارکت در قتل را تکذیب کرده‌اند؛ دون کورلئونه یک آزمون برای شناسایی دروغ‌گوها از راست‌گوها طراحی کرده است. پس از آن که تمامی پدرخوانده‌ها دور میز n نفره نشستند، دون کورلئونه از هر فرد می‌خواهد روی کاغذی بنویسد که نفر سمت راست او دروغ‌گو است یا راست‌گو. از کنار هم قرار دادن نوشته‌های پدرخوانده‌ها (به ترتیب نشستن دور میز) یک دنباله‌ی nتایی ساخته می‌شود. به این دنباله **معتبر** می‌گوییم، اگر حداقل به یک روش بتوان راست‌گو یا دروغ‌گو بودن را به n نفر نسبت داد به طوری که:

- اگر فرد x راستگو است، دروغگویی یا راستگویی نفر سمت راست او **همانند** اظهار نظر فرد x باشد.
- اگر فرد x دروغگو است، دروغگویی یا راستگویی نفر سمت راست او **مخالف** اظهار نظر فرد x باشد.

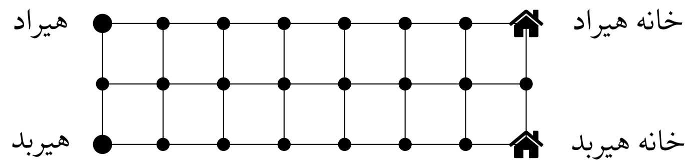
اگر دنباله معتبر نباشد دون کورلئونه از مافیای سیسیل ناامید شده و به زندگی همه پایان می‌دهد. چه تعدادی از دنباله‌ها معتبر هستند؟

۱) ۲^n ۲) n ۳) ۲ ۴) ۱ ۵) $۲^{n-۱}$

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

می‌گوییم وضعیت ۲ نفر یکسان است اگر هر دو راستگو باشند یا هر دو دروغگو. اگر یک پدرخوانده بنویسد نفر راستی‌اش راستگو است، وضعیت او و راستی‌اش یکسان است و اگر بنویسد نفر راستی‌اش دروغگو است، وضعیتشان یکسان نیست. حال اگر از یک پدرخوانده شروع کنیم و ساعتگرد بچرخیم، می‌توان فهمید که هر یک وضعیتش با قبلی یکسان است یا نه. پس از یک دور کامل به تعداد نوشته‌های «دروغگو» وضعیت پدرخوانده‌ها عوض می‌شود و نهایتا به پدرخوانده‌ی ابتدایی می‌رسیم. پس تعداد نوشته‌های «دروغگو» باید زوج باشد. اگر تعداد دروغگوها زوج باشد به دلخواه یک پدرخوانده را راستگو بگیرید و با روش مطرح شده، وضعیت همه‌ی پدرخوانده‌ها معلوم می‌شود و دنباله معتبر است(؟). در نتیجه تعداد دنباله‌های معتبر برابر تعداد مجموعه‌های زوج‌ـ‌عضوی اعداد ۱ تا n است. □

۸ هیربد و هیراد روی نقاط سمت چپ یک شبکه‌ی ۸×۳ ایستاده‌اند و خانه‌های آن‌ها در نقاط سمت راست جدول قرار دارد.



هر یک از آنها در هر گام می‌تواند به یکی از نقاط مجاور راستی، بالایی و یا پایینی‌اش (در صورت وجود) که قبلا از آن عبور نکرده، وارد شود.
این دو نفر قصد دارند به خانه‌هایشان بروند و متاسفانه امروز با هم قهر کرده‌اند؛ برای همین می‌خواهند طوری به خانه‌هایشان بروند که مسیرهای حرکتشان هیچ نقطه و یال مشترکی نداشته باشند. هیربد و هیراد به چند طریق می‌توانند مسیرهایشان را انتخاب کنند؟

۱) ۷۲۹ ۲) ۱۳۹۳ ۳) ۱۷۱ ۴) ۵۷۷ ۵) ۲۳۹

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

$f(n)$ را تعداد جفت مسیرهای مستقل از هم در یک شبکه $n \times ۳$ از بالا چپ به بالا راست و از پایین چپ به پایین راست می‌نامیم.
$g(n)$ را تعداد جفت مسیرهای مستقل از هم در یک شبکه $n \times ۳$ از بالا چپ به بالا راست و از وسط چپ به پایین راست می‌نامیم.
واضح است که جواب مسئله $f(۸)$ می‌باشد. همچنین روابط زیر بین f و g برقرار است و می‌توان جدول را مطابق با روابط پر کرد.

- $f(n) = f(n-۱) + ۲g(n-۱)$
- $g(n) = f(n-۱) + g(n-۱)$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
f	۱	۳	۷	۱۷	۴۱	۹۹	۲۳۹	۵۷۷
g	۱	۲	۵	۱۲	۲۹	۷۰	۱۶۹	

□

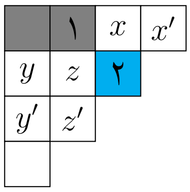
۹ جزیره‌ی فلون که اکنون مسکونی شده است، ۱۰۰ شهر دارد که به شکل یک جدول ۱۰ × ۱۰ ساخته شده‌اند. در ابتدا شهر گوشه بالا راست جزیره به کرونا آلوده شده است. ابتدای هر روز، **تنها** یکی از شهرهای سالم که در مجاورت ضلعی حداقل یک شهر آلوده قرار گرفته است، به کرونا آلوده می‌شود. سپس دکتر ارنست یکی از شهرهای سالم را قرنطینه می‌کند و دیگر امکان ندارد آن شهر آلوده شود.

می‌دانیم شهرهای آلوده هیچ وقت به وضعیت سالم بر نمی‌گردند. دکتر ارنست با استفاده از دستگاه تشخیص کرونا از راه دور همواره می‌داند کدام شهرها آلوده هستند. هدف او کمینه کردن تعداد شهرهای آلوده است. اگر دکتر ارنست بهینه عمل کند، بیشینه‌ی تعداد شهرهای آلوده پس از گذشت ۱۰۰ روز از آغاز شیوع چه‌قدر است؟

۱) ۶　　۲) ۱۶　　۳) ۵　　۴) ۴　　۵) ۱۱

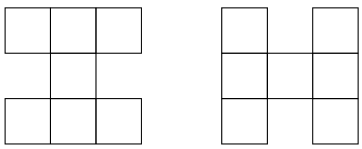
پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

استراتژی دکتر ارنست: بدون کم شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که خانه‌ای که در آن شماره ۱ قرار دارد اولین حرکت کرونا باشد. اگر دکتر ارنست خانه ۲ را قرنطینه کند می‌تواند با ماکسیمم ۵ خانه آلوده شهر را قرنطینه کند. هر بار که کرونا به یکی از خانه‌های x, y, z رفت، دکتر ارنست خانه متناظر میان x', y', z' را قرنطینه می‌کند.



با حالت‌بندی می‌توان ثابت کرد کرونا می‌تواند طوری گسترش پیدا کند که حداقل ۵ شهر آلوده شود(؟). □

یک جدول $n \times n$ که رنگ هر خانه‌ی آن سفید یا سیاه است را **قوی** می‌نامیم، اگر و تنها اگر هیچ یک از اشکال زیر در خانه‌های سفید جدول دیده نشود:



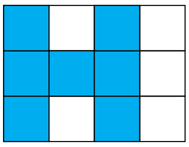
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۰ کمینه‌ی تعداد خانه‌های سیاه را میان تمامی جدول‌های ۵ × ۵ قوی بیابید.

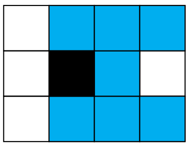
۱) ۳　　۲) ۴　　۳) ۲　　۴) ۵　　۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

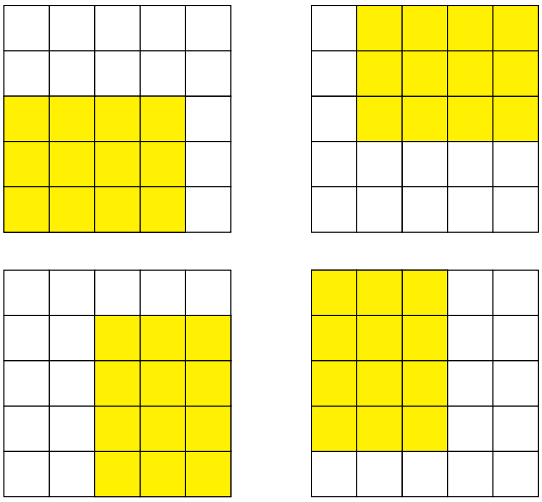
شکل مطرح شده در صورت سؤال را شکل H می‌نامیم.
لم: برای اینکه یک جدول ۴ × ۳ قوی باشد، حداقل ۲ خانه باید سیاه باشند. یک جدول بدون خانه‌ی سیاه قوی نیست. فرض کنید یک جدول با یک خانه‌ی سیاه قوی شده است. پس در ستون اول و آخر این جدول خانه‌ی سیاه قرار ندارد، زیرا در این صورت در ۳ ستون دیگر H دیده می‌شود. پس با توجه به تقارن، فرض کنید خانه‌ی سیاه در ستون دوم است.



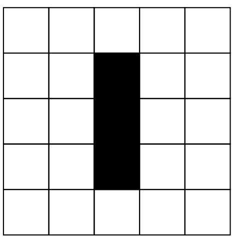
با توجه به شکل بالا، باید ردیف وسط این ستون سیاه باشد. در این صورت با توجه به شکل زیر، یک H وجود دارد و به تناقض می‌رسیم.



با توجه به لم مطرح شده، برای قوی بودن یک جدول ۵ × ۵ حداقل ۲ خانه باید سیاه باشند. حال فرض کنید یک جدول قوی ۵ × ۵ با ۲ خانه‌ی سیاه وجود دارد. طبق لم می‌دانیم در قسمت زرد هر یک جدول‌های زیر حداقل ۲ خانه‌ی سیاه وجود دارد.



پس ۲ خانه‌ی سیاه در جدول باید در تمامی قسمت‌های زرد باشند. اما این ۴ قسمت زرد فقط در خانه‌ی مرکزی جدول اشتراک دارند. پس به تناقض می‌رسیم.
یک جدول قوی حداقل ۳ خانه‌ی سیاه لازم دارد. مثالی از یک جدول قوی در شکل زیر نشان داده شده است:



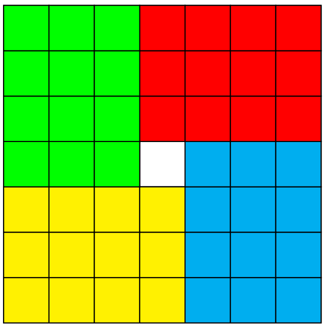
□

۱۱ کمینه‌ی تعداد خانه‌های سیاه را میان تمامی جدول‌های ۷×۷ قوی بیابید.

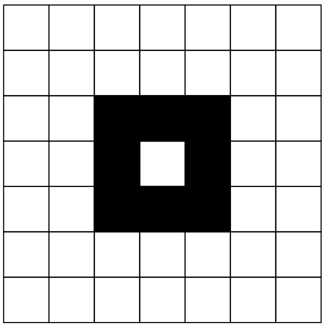
۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۹ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

شکل مطرح شده در صورت سؤال را شکل H می‌نامیم.
به شکل زیر توجه کنید:



با توجه به لم مطرح شده در سؤال قبل برای اینکه در این زیر مستطیل‌ها H دیده نشود، در هر یک از رنگ‌ها باید ۲ خانه سیاه باشد. پس در مجموع به حداقل ۸ خانه‌ی سیاه احتیاج داریم. مثالی از یک جدول قوی با ۸ خانه‌ی سیاه را در شکل زیر مشاهده می‌کنید:



□

در فرودگاه شهری که شنگدباو در آن زندگی می‌کند یک هواپیمای مرموز وجود دارد. در بخش مسافران هواپیما، تنها یک ردیف ۱۰تایی صندلی با شماره‌های ۱ تا ۱۰ وجود دارد و هیچ صندلی دیگری نداریم!
این صندلی‌ها مانند صندلی‌های همه‌ی هواپیماهای دیگر هستند و ۱۱ دسته‌ی صندلی دارند که بین هر دو صندلی و هم‌چنین در دو انتهای ردیف قرار دارند. روی هر یک از ۱۱ دسته، شامل دو دسته‌ی انتهای ردیف، دو کمربند قرار دارد که یکی قفلی کمربند و دیگری قلاب آن است. هر فردی که روی یک صندلی نشسته، برای بستن کمربند خود باید قلاب یکی از دو دسته‌ی مجاورش را بردارد و به قفلی دسته‌ی دیگر ببندد.
همه‌ی اعضای شهر درگیر مسئله‌ی این ده صندلی شده‌اند و شنگدباو به‌عنوان یک دانشمند می‌خواهد به سوالات مردم شهر جواب دهد تا آن‌ها را آرام کند! اما ما می‌دانیم شنگدباو برای حل این معماها به کمک شما احتیاج دارد.
در تمامی سوالات، دو حالت بستن کمربندها را متمایز می‌دانیم اگر حداقل یک قفلی یا قلاب وجود داشته باشد که در یکی از حالات استفاده شده و در حالت دیگر استفاده نشده باشد. هم‌چنین، به حالتی که تمامی صندلی‌ها

سرنشین دارند و تعدادی از افراد، طوری کمربندهای خود را بسته‌اند که **هیچ یک از افراد باقی‌مانده** نتوانند کمربند خود را ببندند، **حالت مزاحم** می‌گوییم. حالتی که تمامی افراد کمربندشان را بسته باشند، حالت مزاحم **نیست.**

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۲ در چند حالت تمامی ۱۰ سرنشین کمربندشان را بسته‌اند؟

۱) ۲۰ ۲) ۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

در تمامی زیر مسئله‌ها فرض کنید کسانی که از قفلی راست استفاده می‌کنند را با «R» و کسانی که از قفلی چپ استفاده می‌کنند را با «L» و کسانی که کمربند نبسته‌اند را با «#» نشان دهیم. همچنین به کسی که نمی‌تواند کمربند خود را ببندند محدود می‌گوییم.

تنها در حالتی که همه R یا همه L باشند همه می‌توانند کمربند خود را بسته باشند. چون در صورتی که یک LR یا RL باشد یک قفلی یا یک قلاب هست که مشترکا استفاده شده است. □

۱۳ کمینه‌ی تعداد سرنشین‌ها با کمربند بسته میان تمامی حالات مزاحم چند است؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۶ ۵) ۹

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

می‌توان ثابت کرد در هر حالت از حالت مزاحم دو نفر متوالی وجود ندارند که هر دو محدود باشند(؟). همچنین نفر ابتدایی و انتهایی همواره می‌توانند کمربند خود را ببندند. پس حداقل ۶ نفر می‌توانند کمربند خود را ببندند. در مثال «R#L#R#L#RR» دقیقا ۶ نفر کمربند خود را بسته‌اند و باقی افراد نمی‌توانند کمربند خود را ببندند. □

۱۴ چند حالت مزاحم وجود دارد؟

۱) ۲۹۶ ۲) ۵۴ ۳) ۱۱۰ ۴) ۱۰ ۵) ۱۰۸

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

با توجه به نتایج سوال قبلی می‌دانیم در بین ۸ صندلی وسط دو صندلی متوالی محدود وجود ندارد.
به $fib(۱۰) = ۵۴$ طریق می‌توان جای صندلی‌های محدود را میان ۸ صندلی وسط مشخص کرد(؟). همچنین حالتی که همه کمربند خود را بسته باشند نیز حساب نمی‌شود، پس به ۵۴ طریق می‌توان جای صندلی‌های محدود را مشخص کرد. حال با توجه به اینکه نفر سمت راست کمربند خود را از سمت چپ یا راست ببندد، به صورت یکتا مشخص می‌شود که هر یک از افراد دیگر از کدام قفلی و قلاب استفاده کنند تا صندلی‌های مشخص شده محدود شوند(؟). پس در مجموع ۱۰۸ حالت مزاحم وجود دارد. □

لوک در یک جدول $n \times m$ به دنبال اسبش جالی می‌گردد. لوک تلاش می‌کند که اسبش را پیدا کند در حالی که جالی از دست او فرار می‌کند.
در هر مرحله، لوک k خانه از جدول را مشاهده می‌کند و اگر جالی داخل یکی از این خانه‌ها باشد جالی را پیدا می‌کند. در غیر این صورت، جالی یا سر جایش می‌ایستد یا یک حرکت انجام می‌دهد. از آن‌جایی که جالی یک

اسب است، فقط می‌تواند مشابه اسب شطرنج حرکت کند. اسب شطرنج دو خانه در جهت افقی یا عمودی حرکت می‌کند و سپس ۹۰ درجه به چپ یا راست می‌پیچد و یک خانه‌ی دیگر حرکت می‌کند.

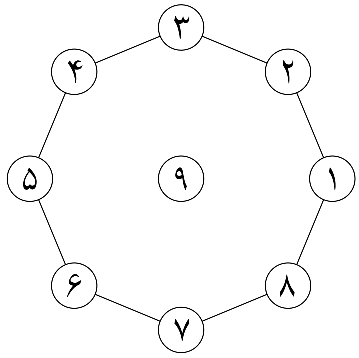
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵ در یک جدول ۳×۳ کمینه‌ی k را بیابید به طوری که لوک حتما بتواند جالی را در متناهی مرحله پیدا کند.

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۸ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

یک گراف از خانه‌های جدول به این صورت رسم می‌کنیم که بین دو راس یال وجود دارد اگر جالی بتواند در یک مرحله میان خانه‌های متناظر حرکت انجام دهد. گراف متناظر به ازای جدول ۳×۳ به شکل زیر است:



به ازای $k \leqslant ۲$ چون هر راس از گراف حداقل دو همسایه دارد، جالی در یک مرحله ۳ گزینه دارد. به ازای هر حالت از دیدن‌های لوک اگر جالی به آن خانه‌ای که لوک نمی‌بیند برود، لوک نمی‌تواند هیچ وقت جالی را پیدا کند.
برای $k = ۳$ لوک ابتدا راس شماره ۹ را می‌بیند. اگر پیدا نشد. در شش مرحله از نگاه کردن می‌تواند اسب را پیدا کند:

- در هر مرحله راس‌های $(۱, i, i + ۱)$ را مشاهده می‌کند. $(۸ > ۲ \geqslant i)$
- اگر جالی در خانه ۱ باشد پیدا می‌شود. همچنین هیچ‌وقت از ۱ نمی‌تواند عبور کند.
- هر بار راس‌های i و $i + ۱$ را مشاهده می کنیم جالی نمی‌تواند در خانه‌ای با اندیس کمتر از i باشد. در غیر اینصورت پیش از این پیدا شده است(؟).
- با توجه به دو مورد قبل حتما جالی پیدا می‌شود.

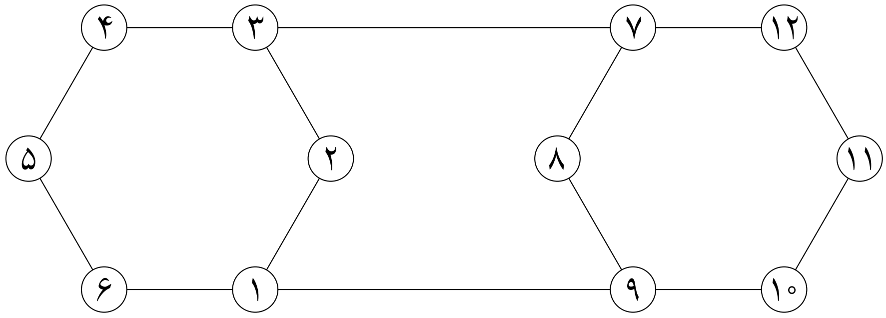
□

۱۶ در یک جدول ۴×۳ کمینه‌ی k را بیابید به طوری که لوک حتما بتواند جالی را در متناهی مرحله پیدا کند.

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۲ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

گراف متناظر جدول ۴×۳ به شکل زیر است.



به ازای $k \leqslant ۲$ مشابه سوال قبل است. برای $k = ۳$ مشابه سوال قبل ابتدا دور سمت چپ را مطمئن می‌شویم که خالی‌است به طوری که در آخرین حرکت راس‌های (۱, ۲, ۳) بررسی شده باشند. سپس راس‌های (۱, ۷, ۳)، بعد از آن (۱, ۷, ۹) و بعد از آن (۷, ۸, ۹) را مشاهده می‌کنیم. طی این مراحل جالی نمی‌تواند به دور سمت چپ بازگردد(؟). سپس دور سمت راست را مشابه سوال قبل بررسی می‌کنیم. □

در شهر یاخچی‌آباد، هر خانه به صورت یک نقطه است که یک خانواده در آن زندگی می‌کند. فاصله‌ی نزدیک‌ترین خانه به هر خانه را **شعاع همسایگی** آن خانه می‌نامند. فاصله‌ی دو خانه برابر است با طول پاره‌خط واصل نقاط متناظرشان.
هر خانواده تمامی خانواده‌هایی را که در شعاع همسایگی‌اش باشند، **همسایه‌ی** خود می‌داند. دو خانواده **صمیمی** هستند اگر هر یک دیگری را همسایه‌ی خود بداند. تعداد جفت خانواده‌های صمیمی در یک محله **صمیمیت** آن محله محسوب می‌شود.
شهردار یاخچی‌آباد قصد دارد یک محله‌ی جدید با ۹۱ خانه تاسیس کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ شهردار که می‌داند صمیمیت زیاد افراد می‌تواند برای قدرت او تهدید به حساب آید، می‌خواهد صمیمیت این محله کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. این مقدار چه‌قدر است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۴۵ ۴) ۲ ۵) ۹۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

کمترین مقدار، ۱ است. اگر بین تمام جفت خانواده‌ها، آن دو خانواده‌ای که به هم نزدیک‌تر هستند را در نظر بگیریم .آن دو خانواده ، قطعا با هم صمیمی هستند. پس جواب حداقل ۱ می‌باشد. همچنین اگر خانواده‌ها را روی محور x در نقاط $۱, ۲, ۴, ۸, \ldots ۲^{۹۱}$ قرار دهیم، تنها دو خانواده‌ی اول صمیمی هستند. پس جواب دقیقا یک می‌باشد. □

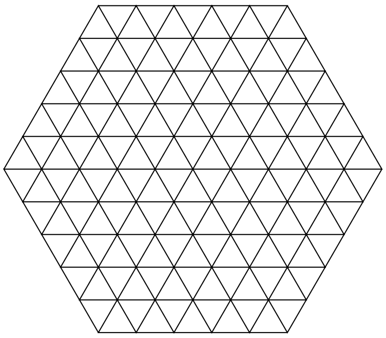
۱۸ معاون شهردار در راستای راهبرد و برنامه‌ی سیاسی خویش، می‌خواهد نقشه‌ای پیشنهاد بدهد که صمیمیت این محله بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد. اگر این مقدار x باشد، چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- $x \geqslant ۸۰$
- $x \geqslant ۱۶۰$
- $x \geqslant ۲۴۰$
- $x \geqslant ۳۲۰$

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) ۲ ۵) ۳

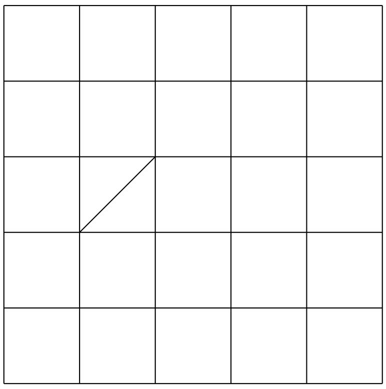
پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

می‌دانیم هر خانواده حداکثر می‌تواند با ۶ خانواده صمیمی باشد. فرض کنید خانواده‌ای بیش از ۶ همسایه صمیمی داشته باشد و آن را c می‌نامیم، یک دایره به مرکز این خانواده و با شعاع همسایگی رسم کنید. واضح است که بیش از ۶ نقطه روی این دایره است پس زاویه بین دو تا از این خانه ها کمتر از ۶۰ می‌باشد پس c نمی‌تواند با این دو خانواده صمیمی باشد. بنابرین حداکثر $۲۷۳ = \frac{۹۱\times۶}{۲}$ جفت خانواده صمیمی وجود دارد (با گراف مسطح نیز می‌توان این قسمت را اثبات کرد).
در شکل زیر بین هر جفت خانواده صمیمی یک خط کشیده شده است و ۲۴۰ جفت خانواده صمیمی وجود دارد.
پس می‌تواند گفت که ۳ تا از ۴ گزاره ذکر شده صحیح می‌باشد.



□

یک جدول ۵ × ۵ داریم. به یک قطر از یک مربع واحد این جدول، **قطرک** می‌گوییم. برای مثال، یک قطرک در شکل زیر نشان داده شده است:



دو نقطه‌ی انتهایی هر قطرک، **مرزهای** آن قطرک نامیده می‌شوند. اگر یک نقطه مرز چهار قطرک رسم‌شده باشد، **اشباع** نامیده می‌شود (نقاط محیطی جدول هیچ‌گاه اشباع نمی‌شوند).
در هر یک از سوال‌های این دسته قرار است تعدادی قطرک رسم شود (ممکن است قطرک‌ها هم‌دیگر را قطع کنند).

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ حداکثر چند قطرک می‌توان در جدول رسم کرد، طوری که هیچ نقطه‌ای اشباع نباشد؟

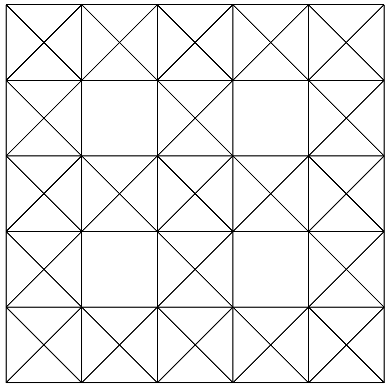
۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۴۶ ۴) ۴۲ ۵) ۳۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

برای اینکه هیچ مرزی اشباع نشود:

- هر نقطه در وسط شکل و نه روی محیط جدول (۱۶ نقطه) می‌تواند مرز حداکثر ۳ قطرک باشد.
- هر نقطه روی محیط جدول به جز ۴ گوشه (۱۶ نقطه) می‌تواند مرز حداکثر ۲ قطرک باشد.
- هر نقطه از ۴ گوشه می‌تواند مرز حداکثر ۱ قطرک باشد

پس در مجموع نقاط می‌توانند ۸۴ بار مرز باشند. از آنجایی که هر قطرک دقیقا ۲ مرز دارد، تعداد قطرک‌ها حداکثر ۴۲ می‌شود. در مثال زیر ۴۲ قطرک رسم شده و هیچ نقطه‌ای اشباع نشده است:



□

۲۰ سلطان و ایلیچ یک جدول ۵ × ۵ خالی دارند و می‌خواهند بازی کنند. سلطان بازی را آغاز می‌کند. هر فرد در نوبتش یک قطرک (که تا به‌حال کشیده نشده) رسم می‌کند. نخستین کسی که پس از حرکتش نقطه‌ی اشباع به وجود بیاید، می‌بازد. **فان‌دی‌پلنر** (دوست ایلیچ) سه الگوریتم برای بازی کردن به ایلیچ پیشنهاد داده است.

- الگوریتم (آ): فرض کنید سلطان در نوبتش در خانه‌ای مانند A یک قطرک رسم کند. بلافاصله پس از آن، قطرک دیگر خانه‌ی A را رسم کن.
- الگوریتم (ب): هر قطرکی که سلطان کشید، آن را نسبت به «خط عمودی گذرنده از نقطه‌ی وسط جدول» قرینه کرده و قطرک متناظر را رسم کن.
- الگوریتم (پ): اگر سلطان قطرکی در خانه‌ی وسط جدول رسم کرد، قطرک باقی‌مانده در خانه‌ی وسط جدول را رسم کن؛ در غیر این صورت قطرک سلطان را نسبت به «نقطه‌ی وسط جدول» قرینه کرده و قطرک متناظر را رسم کن.

کدام الگوریتم‌ها (مستقل از نحوه‌ی بازی سلطان) باعث برد ایلیچ می‌شوند؟

۱) ب و پ ۲) هر سه مورد ۳) آ و ب ۴) ب ۵) هیچ‌کدام

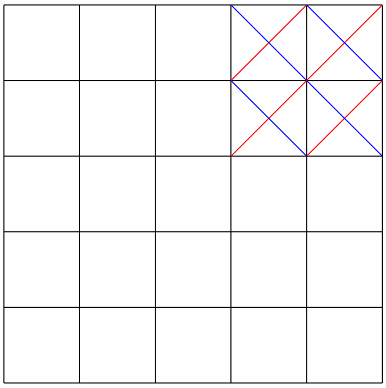
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

درون هر مربع قطرک‌ها را به شکل زیر نام گذاری می‌کنیم:

- قطرک اصلی: قطرکی که از بالا چپ به پایین راست کشیده می‌شود.
- قطرک فرعی: قطرکی از بالا راست به پایین چپ کشیده می‌شود.

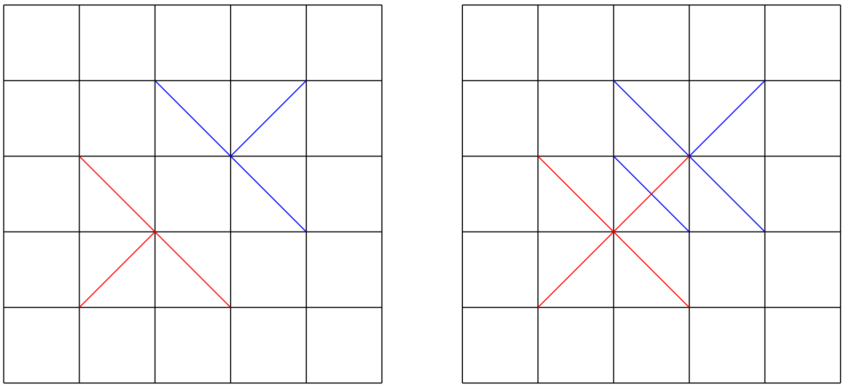
در تمامی موارد سلطان آبی و ایلیچ قرمز است.

الگوریتم (آ): سلطان می‌تواند طوری بازی کند که ایلیچ ببازد. اگر سلطان در ۴ مرحله قطرک اصلی ۴ مربع گوشه بالا سمت راست را بکشد ایلیچ در ۴ امین حرکتش نقطه میانی را اشباع می‌کند.



الگوریتم (ب): با این الگوریتم ایلیچ همیشه می‌برد. فرض کنید یک نقطه را ایلیچ برای اولین بار اشباع کند. نقطه‌ی قرینه نقطه‌ای که ایلیچ اشباع کرده است نسبت به خط عمودی پیش از حرکت ایلیچ اشباع شده است که تناقض است.

الگوریتم (پ): سلطان می‌تواند طوری بازی کند که ایلیچ ببازد. اگر سلطان در ۳ حرکت ابتدایی قطرک‌های زیر را رسم کند و سپس قطرک اصلی خانه وسط جدول را بکشد ایلیچ می‌بازد.



□