سوال اول. جدول بازی .... ۲۴ نمره

الف) فرناز استراتژی برد دارد. توجه کنید بازی زمانی پایان می‌یابد که یا هیچ دو خط عمودی متوالی، یا هیچ دو خط افقی متوالی در جدول باقی نمانده باشند که این حالت را شرط پایانی می‌نامیم. زیرا اگر هم دو خط افقی متوالی وجود داشته باشند و هم دو خط متوالی عمودی، این چهار خط یک مربع واحد ایجاد می‌کنند. و همینطور اگر مربع واحدی باقی‌مانده باشد، قطعا هم دو خط افقی متوالی هم دو خط عمودی متوالی وجود دارد.

حال فرض کنید خط‌های عمودی از چپ به راست و خط‌های افقی از بالا به پایین با شماره‌های ۱ تا $n + 1$ شماره‌گذاری شده‌اند. سپس در هر مرحله امید اگر خط عمودی i-ام را پاک کند، فرناز خط افقی i-ام را پاک می‌کند و اگر امید خط افقی i-ام را پاک کند، فرناز خط عمودی i-ام را پاک می‌کند. با این کار امکان ندارد بعد از حرکت فرناز بازی تمام شود. زیرا هر بار که فرناز یک خط حذف می‌کند، مجموعه خط‌های افقی و عمودی یکسان می‌شوند. اگر بعد از حذف فرناز بازی تمام شود، یعنی هم هیچ دو خط عمودی متوالی و هم هیچ دو خط افقی متوالی وجود ندارد. پس قبل از حرکت فرناز یا خط‌های عمودی یا خط‌های افقی این شرایط را داشتند و به شرط پایانی رسیده‌ایم. پس فرناز با این روش آخرین نفر بازی نخواهد بود و بازی را می‌برد.

ب) فرناز استراتژی برد دارد. در این بخش شرط پایان نیز همانند بخش قبل است.

در این بخش فرناز تقریباً همانند بخش قبل بازی می‌کند (خط با شماره یکسان خطی که امید حذف کرده، حذف می‌کند). اما با این کار فرناز می‌بازد. برای این که فرناز ببرد، آخرین حرکت فرناز را در نظر بگیرید که بعد آن امید با حرکت خودش بازی را می‌برد. فرض کنید در این حرکت فرناز خط افقی حذف می‌کند. بعد از حرکت فرناز خط‌های افقی و عمودی وضعیت یکسانی دارند. پس اگر با حذف یک خط می‌توان به شرط پایانی رسید، هم با حذف خط افقی و هم با حذف خط عمودی می‌توان این کار را کرد. پس با توجه به این که فرناز خط افقی حذف کرده است، وضعیت خط‌های عمودی در این حرکت تغییری نمی‌کنند. در نتیجه با حذف یک خط عمودی فرناز می‌تواند بازی را تمام کند و ببرد.

در نتیجه در این قسمت فرناز در هر مرحله اگر بتواند بازی را تمام کند، این کار را می‌کند. در غیر این صورت، همانند بخش قبل بازی می‌کند. با این روش حتماً فرناز می‌برد.

سوال دوم. بینش ابوالفضل مظفری .... ۲۴ نمره

الف) دو رنگ آمیزی متفاوت نشان می‌دهیم که به ازای هر دور به طول n جواب‌هایی که ابوالفضل به مظفر می‌دهد، یکسان باشد. در رنگ آمیزی اول، رنگ هر یال به جز یال‌هایی که به رأس با شماره‌ی ۱ وصل هستند، آبی می‌باشد. در رنگ آمیزی دوم رنگ هر یال به جز یال‌هایی که به رأس با شماره‌ی ۲ وصل هستند، آبی می‌باشد. دقت کنید که در هر دور به طول n درجه‌ی هر رأس دقیقاً ۲ است. در نتیجه، جواب تمام سوال‌ها در دو رنگ آمیزی ذکر شده، عدد ۲ خواهد بود. بنابراین مظفر حتی با داشتن جواب تمام سوالات نمی‌تواند تفاوتی بین این دو رنگ آمیزی پیدا کند.

ب) برای هر یال e مقدار $f(e)$ را برابر ۱ می‌گذاریم اگر این یال قرمز باشد و در غیر این صورت آن را صفر می‌گذاریم. یک مثلث در گراف در نظر بگیرید که از رأس‌های v_1, v_2, v_3 تشکیل شده باشد. حال دور هامیلتونی $v_1, v_2, \dots, v_n$ و دور $v_1, v_3, v_4, \dots, v_n$ که دوری به طول $n-1$ است را در نظر بگیرید. از تفاضل تعداد یال های قرمز این دو دور، مظفر می‌تواند به مقدار

$$f(\{v_1, v_2\}) + f(\{v_2, v_3\}) - f(\{v_1, v_3\})$$

دست پیدا کند. به طور مشابه مظفر می‌تواند

$$f(\{v_1, v_2\}) + f(\{v_1, v_3\}) - f(\{v_2, v_3\})$$

را به دست آورد. از جمع زدن این دو عبارت مقدار $2f(\{v_1, v_2\})$ حاصل می‌شود. در نتیجه، به ازای هر یال دلخواه e مثل $\{v_1, v_2\}$، ابوالفضل می‌تواند $f(e)$ را به دست آورد و رنگ یال e را تشخیص دهد.

سوال سوم. رأس نباید درجه یک باشد .... ۲۴ نمره

جواب این بخش $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ است. برای هر n، گرافی را در نظر بگیرید که یال‌های آن از اجتماع یال‌های یک دور همیلتونی و یک ستاره (درختی که تمام یال‌های آن در یک رأس مشترک‌هستند) به وجود آمده است. حال ستاره این گراف را به عنوان درخت T در نظر می‌گیریم. این درخت $n - ۱$ برگ دارد و هر یال حداکثر دو برگ را از درجه یک بودن خارج می‌کند. پس حداقل $\left\lceil \frac{n-۱}{۲} \right\rceil$ یال نیاز داریم که برابر با $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ می‌شود.

حال می‌خواهیم ثابت کنیم همواره با اضافه کردن $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ یال می‌توان راس‌های هر گراف دارای شرایط مسئله را به درجه حداقل دو تبدیل کرد. برای این کار، دور همیلتونی گراف را در نظر می‌گیریم و یال‌های آن را یک در میان انتخاب می‌کنیم. اگر تعداد رأس‌های گراف فرد باشد، یک رأس به هیچ یال انتخابی متصل نخواهد بود. یال‌ها را به صورتی انتخاب می‌کنیم که آن رأس برگ نباشد (هر درخت با $n \geq 3$ رأس حداقل یک رأس با درجه بزرگ‌تر از یک دارد). توجه کنید که الان $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ یال انتخاب کرده‌ایم. اگر بتوانیم این یال‌ها را به درخت اضافه کنیم، درجه تمام رأس‌ها (به غیر از حداکثر یک رأس غیر برگ) یکی افزایش می‌یابد و هیچ رأس درجه یکی باقی نمی‌ماند. اما ممکن است بعضی از یال‌های انتخابی جزو یال‌های درخت باشند و نتوان آن‌ها را اضافه کرد. در این صورت، به ازای هر یال انتخابی که عضو درخت است، با توجه به این که یک سر این یال برگ است و سر دیگر آن برگ نیست، آن یال را حذف می‌کنیم و بجای آن یک یال دیگر متصل به برگ انتخاب می‌کنیم (با توجه به برگ بودن این رأس، یال انتخابی جدید قطعاً درون درخت نیست). با این‌کار تعداد یال‌های انتخابی تغییری نمی‌کند و تمام برگ‌ها حداقل به یک یال انتخابی متصل خواهند بود. پس با انتخاب این یال‌ها که حداکثر $\left\lfloor \frac{n}{۲} \right\rfloor$ تا هستند، درجه همه رأس‌ها حداقل ۲ خواهد بود.

سوال چهارم. جبارزید و استاد سحرآمیز .... ۲۸ نمره

الف) افراد را از ۱ تا ۱۴۰۰ شماره‌گذاری می‌کنیم و پیشوند i یا p_i را مجموعه‌ی افراد با شماره‌های $۱, ۲, ۳, \dots, i$ تعریف می‌کنیم. روشی ارائه می‌دهیم که در آن جبارزید با پرسیدن حداکثر ۲۳ پیشوند از استاد، سه فرد از کشورهای متمایز پیدا کند:

پاسخ استاد به سوال p_i را $ans(p_i)$ می‌نامیم. داریم $ans(p_۱) = ۱$ و $ans(p_{۱۴۰۰}) = ۳$ و به ازای هر $۱ \leq i \leq ۱۳۹۹$ داریم $ans(p_i) \leq ans(p_{i+1})$. پس دنباله‌ی $A = ans(p_۱), ans(p_۲), \dots, ans(p_{۱۴۰۰})$ به شکل $۱,۱,\dots,۲,۲,۲,\dots,۳,۳,۳,\dots,۳$ می‌باشد. اگر p_x و p_y کوچک‌ترین پیشوندهایی باشند که $ans(p_x) = ۲$ و $ans(p_y) = ۳$، آن‌گاه افراد با شماره ۱ و x و y از سه کشور متفاوتند. پیدا کردن هر یک از x و y با استفاده از الگوریتم جست و جوی دودویی (باینری سرچ) روی دنباله‌ی A با ۱۱ مرحله امکان‌پذیر است، پس به این صورت در ۲۲ مرحله می‌توان پاسخ را یافت.

چالش برای تفکر بیشتر: با تغییر در جست و جوی دودویی می‌توان تعداد مراحل را تا ۲۰ نیز کاهش داد!

ب) حالت‌هایی را «زیبا» در نظر می‌گیریم که یک کشور ۱۳۹۸ عضو داشته باشد و دو کشور تک‌عضوی باشد؛ $\binom{۱۴۰۰}{۲}$ حالت زیبا وجود دارد. روش دلخواهی در نظر می‌گیریم که با حداکثر ۱۱ پرسش مسئله را حل می‌کند. چون پاسخ هر مرحله عددی بین ۱ تا ۳ است، در عمل $۳^{۱۱}$ نتیجه‌ی مختلف از پرسش‌ها در این روش ممکن است پیش بیاید، پس حداکثر $۳^{۱۱}$ گزارش مختلف (گزارش ۳ نفری که از کشورهای مختلف هستند) می‌تواند ارائه کند. این روش روی هر یک از $\binom{۱۴۰۰}{۲}$ حالت زیبا به یکی از حداکثر $۳^{۱۱}$ نتیجه‌ی خود می‌رسد. پس طبق اصل لانه کبوتری ۴ حالت زیبا هستند که به یک گزارش برابر می‌رسند و این یعنی روش گفته شده درست کار نمی‌کند؛ زیرا هر نتیجه‌ی (a , b, c) برای حداکثر ۳ حالت زیبا پاسخ درستی می‌دهد (۳ حالت بر اساس این که کدام‌یک از a و b و c از کشور ۱۳۹۸ نفره باشد). پس امکان ندارد روشی با ۱۱ پرسش درست کار کند، و حداقل ۱۲ پرسش لازم است.