

مرحله‌ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- زمان آزمون ۹۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۱۵ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

۱ فرض کنید $A_0 = \emptyset$ ، و به ازای هر عدد طبیعی n ، داشته باشیم $A_n = \{\emptyset, \{A_{n-1}\}\}$. برای مثال $A_1 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. در عبارتی که برای نمایش A_1 نوشته می‌شود، اگر به جای هر علامت « \emptyset »، عبارت « $\{\}$ » را جایگزین کنیم، رشته‌ی حاصل چند علامت « $\{\}$ » خواهد داشت؟

۳۱ (۱) ۱۰۲۴ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴) ۳۰ (۵)

۲ به یک عبارت ریاضی ساده گوییم، اگر تنها از اعداد طبیعی، دو عمل جمع و ضرب، و پرانتز ساخته شده باشد (لزومی ندارد از تمام موارد گفته شده استفاده شده باشد). فرض کنید مجموع تمام اعداد به کار رفته در یک عبارت ریاضی ساده، برابر ۸ باشد. اگر تمام اعداد این عبارت را در ۲ ضرب کنیم، حاصل عبارت حداکثر می‌تواند چند برابر شود؟

۲۵۶ (۱) ۵۱۲ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۲ (۵)

۳ سنگ، کاغذ، قیچی یک بازی معروف دو نفره است که به شکل زیر انجام می‌شود:

هر بازیکن یک دستش را به یکی از سه شکل سنگ، کاغذ و قیچی در می‌آورد (دو بازیکن به طور هم‌زمان این کار را انجام می‌دهند). اگر هر دو بازیکن یک شکل را انتخاب کرده باشند، نتیجه‌ی بازی مساوی می‌شود؛ در غیر این صورت، برنده به صورت زیر مشخص می‌گردد:

- اگر یک دست به شکل سنگ و دست دیگر به شکل قیچی باشد، برنده‌ی بازی کسی است که دستش به شکل سنگ است.
- اگر یک دست به شکل قیچی و دست دیگر به شکل کاغذ باشد، برنده‌ی بازی کسی است که دستش به شکل قیچی است.
- اگر یک دست به شکل کاغذ و دست دیگر به شکل سنگ باشد، برنده‌ی بازی کسی است که دستش به شکل کاغذ است.

۶ نفر با شماره‌های ۱ تا ۶ به ترتیب از راست به چپ در یک ردیف ایستاده‌اند. به ازای هر $1 \leq i \leq 5$ ، دست چپ نفر شماره‌ی i با دست راست نفر شماره‌ی $i + 1$ بازی سنگ، کاغذ، قیچی را (دقیقاً یک مرتبه) انجام می‌دهد. یک نفر خسته‌کننده نامیده می‌شود، اگر نتیجه‌ی هر دو بازی‌اش یکسان شود (یعنی هر دو بازی را ببرد، یا هر دو بازی را ببازد، یا هر دو بازی‌اش مساوی شود). نفرات با شماره‌های ۱ و ۶ (که تنها یک بازی انجام می‌دهند)، خسته‌کننده محسوب نمی‌شوند. در چند حالت متمایز از انجام بازی‌ها، فرد خسته‌کننده‌ای وجود ندارد؟ دو حالت از انجام بازی‌ها را متمایز در نظر می‌گیریم، اگر دستی باشد که در این دو حالت، دو شکل مختلف (از سه شکل سنگ، کاغذ، و یا قیچی) را انتخاب کرده باشد.

۲۳۳۲۸ (۱) ۱۱۶۶۴ (۲) ۷۲۹ (۳) ۶۹۹۸۴ (۴) ۷۷۷۶ (۵)

مرحله‌ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

۴ در یک مرغ‌داری، برای باز شدن هر تخم‌مرغ و در آمدن جوجه از آن باید تعدادی نوک به آن زده شود (این مقدار به میزان استحکام پوست تخم‌مرغ بستگی دارد). ۷ تخم‌مرغ داریم که به ترتیب به ۰، ۱، ۲، ... و ۶ نوک برای باز شدن نیاز دارند. می‌خواهیم این تخم‌مرغ‌ها را در یک ردیف بچینیم. در هر مرحله، یکی از تخم‌مرغ‌هایی که به ۰ نوک نیاز دارد، باز می‌شود و جوجه از آن بیرون می‌آید؛ سپس جوجه‌ی بیرون آمده به تمام تخم‌مرغ‌های سمت راستش در ردیف ۲ نوک می‌زند (اگر تخم‌مرغی به کم‌تر از ۲ نوک نیاز داشته باشد، به همان مقدار مورد نیاز به آن نوک زده می‌شود). در چند ترتیب اولیه از تخم‌مرغ‌ها در ردیف مذکور، تمام تخم‌مرغ‌ها جوجه خواهند شد؟

۴۸ (۱) ۱۲۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۱۴۴ (۴) ۹۶ (۵)

۵ جدول زیر از ۸ سطر و ۸ ستون با شماره‌های ۱ تا ۸ تشکیل شده است:

۸								
۷								
۶								
۵								
۴								
۳								
۲								
۱								
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

به دو خانه مجاور می‌گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. هر گاه از خانه‌ی پایین-چپ جدول آغاز کنیم، هر مرحله به خانه‌ی مجاور راستی یا خانه‌ی مجاور بالایی برویم و در پایان به خانه‌ی بالا-راست جدول برسیم، یک مسیر استاندارد را طی کرده‌ایم.

به ازای هر $1 \leq i, z \leq 8$ ، ارزش خانه‌ی واقع در سطر i و ستون z برای کیوان $i + z$ ، و برای پیمان $i - z$ است (ارزش برخی از خانه‌ها برای پیمان منفی می‌شود). برای هر یک از این دو نفر، ارزش یک مسیر استاندارد، برابر مجموع ارزش خانه‌های آن مسیر برای آن شخص است. میانگین ارزش تمام مسیرهای استاندارد برای کیوان و پیمان به ترتیب (از راست به چپ) چیست؟

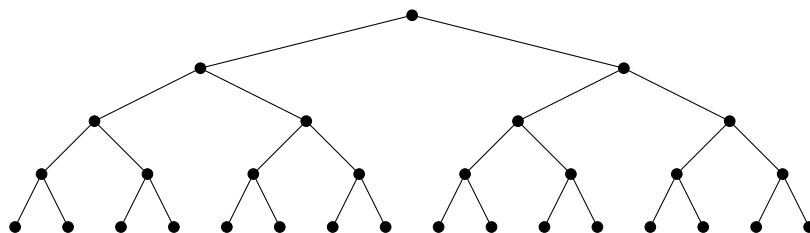
۱۳۶ (۱) و ۰ ۲۷۲ (۲) و -۳۶ ۱۳۵ (۳) و ۰ ۲۷۲ (۴) و ۰ ۳۶ (۵) و -۳۶

۶ به یک جایگشت از اعداد ۱ تا n ابرزوج می‌گوییم، اگر مجموع هر ۳ عدد متوالی در آن زوج باشد. بیشینه‌ی n را بیابید، به نحوی که جایگشتی ابرزوج از اعداد ۱ تا n وجود داشته باشد.

۵ (۱) ۹ (۲) ۱۱ (۳) ۷ (۴) ۸ (۵)

مرحله‌ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

شکل زیر از ۳۱ رأس (نقطه) متمایز و ۳۰ یال (پاره‌خط) ساخته شده است.



فاصله‌ی دو رأس برابر کم‌ترین تعداد یال‌های مورد نیاز برای رفتن از یکی به دیگری است. فاصله‌ی چند جفت رأس در این شکل برابر ۵ است؟ دقت کنید برای دو رأس a و b ، جفت (a, b) و (b, a) یکسان محسوب می‌شوند.

۱۶ (۱) ۹۶ (۲) ۱۲۸ (۳) ۶۴ (۴) ۸۰ (۵)

۱۰ دانش‌آموز یک مدرسه در صفی ایستاده‌اند و روی سر هر کدام از آن‌ها کلاهی قرمز یا آبی قرار دارد. ناظم در هر مرحله، یکی از دانش‌آموزان صف را از صف خارج کرده و به کلاس می‌فرستد. نحوه‌ی انتخاب دانش‌آموز توسط ناظم در هر مرحله به شکل زیر است:

اگر تنها یک نفر در صف باشد، همان فرد انتخاب می‌شود؛ در غیر این صورت (در صورت وجود حداقل دو نفر در صف)، اگر نفر اول صف کلاه آبی و نفر دوم کلاه قرمز داشته باشند، نفر دوم صف، و در غیر این صورت، نفر اول صف انتخاب می‌شود.

پس از ۱۰ مرحله، تمام دانش‌آموزان صف به کلاس می‌روند. یک دنباله از رنگ‌های قرمز و آبی را به این صورت می‌سازیم که از یک دنباله‌ی خالی شروع می‌کنیم و به ازای هر دانش‌آموزی که از صف خارج شد، رنگ کلاه او را در انتهای دنباله اضافه می‌کنیم. به دنباله‌ی ۱۰ عنصری حاصل دنباله‌ی سلطانی صف می‌گوییم. تمام ۲۱۰ حالت اولیه برای رنگ کلاه‌های دانش‌آموزان صف، روی هم چند دنباله‌ی سلطانی متمایز تولید می‌کنند؟

۱۰۲۴ (۱) ۵۱۳ (۲) ۱۴۴ (۳) ۵۱۲ (۴) ۱۲۸ (۵)

۹ می‌خواهیم ۲۰ جایزه با ارزش‌های $۲^۰$ ، $۲^۱$ ، ... و $۲^{۱۹}$ را بین ۱۰ بچه تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً ۲ جایزه برسد؛ حتی ممکن است به یک نفر هیچ جایزه‌ای نرسد). هر بچه به میزان مجموع ارزش جایزه‌های دریافتی‌اش خوشحال می‌شود. پس از پخش جایزه‌ها، به خوشحال‌ترین بچه، شنگول و به بچه‌ای که کم‌ترین خوشحالی را دارد، منگول می‌گوییم. کمینه‌ی اختلاف خوشحالی شنگول و منگول چه قدر است؟

۵۲۲۲۴۱ (۱) ۱۰۲۴ (۲) ۵۲۲۷۵۳ (۳) ۴۲۵۷۰۰ (۴) ۳۲۵۲۳ (۵)

۱۰ جدولی ۳×۲ داریم. به دو خانه از جدول مجاور گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به مجموعه‌ای از خانه‌ها همبند گوییم اگر به ازای هر دو خانه‌ی A و B از آن مجموعه، بتوانیم از A آغاز کرده، هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور برویم، و در پایان به B برسیم. به چند طریق می‌توان خانه‌های این جدول را به ۴ مجموعه‌ی همبند افراز کرد؟

۲ (۱) ۱۰ (۲) ۶ (۳) ۳۱ (۴) ۲۱ (۵)

مرحله‌ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

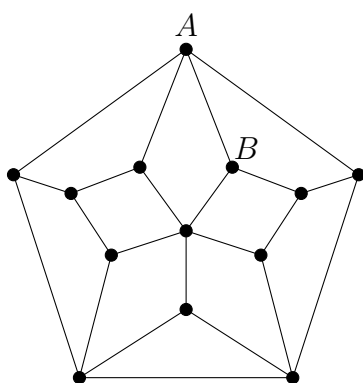
۱۱ یک جدول 3×2 داریم که در ابتدا، تمام خانه‌های آن سفید هستند. به دو خانه‌ی سفید با یک ضلع مشترک در جدول دومینوس می‌گوییم. الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

تا زمانی که در جدول دومینوس وجود دارد، از میان همه‌ی دومینوس‌ها، یکی را به صورت تصادفی (با احتمال‌های برابر) انتخاب کرده و هر دو خانه‌ی آن را سیاه می‌کنیم.

به چه احتمالی پس از پایان الگوریتم، کل جدول سیاه خواهد شد؟

- $\frac{13}{21}$ (۱) $\frac{5}{6}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{17}{21}$ (۵)

۱۲ در شکل زیر، به دو نقطه (رأس) مجاور می‌گوییم، اگر با یک پاره‌خط مستقیم به هم وصل باشند:



می‌خواهیم از نقطه‌ی A آغاز کنیم، در هر مرحله به یک نقطه‌ی مجاور برویم و پس از دقیقاً ۶ مرحله به نقطه‌ی B برسیم (عبور از نقطه یا پاره‌خط تکراری اشکالی ندارد). این کار به چند طریق ممکن است؟

- 4 (۱) 6 (۲) 7 (۳) 0 (۴) 8 (۵)

۱۳ فرض کنید $\langle a_1, a_2, \dots, a_{14} \rangle$ رشته‌ای از ارقام 0 و 1 باشد. به تعدادی رقم متوالی و برابر، یک زنجیره می‌گوییم. زنجیره‌ای که بخشی از یک زنجیره‌ی بزرگ‌تر نباشد، بلوک نامیده می‌شود. برای مثال، رشته‌ی زیر از ۴ بلوک ساخته شده است:

$\langle 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$

الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

تا زمانی که تعداد بلوک‌های رشته بیش‌تر از یک است، بلوک اول و دوم (از سمت چپ) را در نظر می‌گیریم و بلوک کوچک‌تر را حذف می‌کنیم (اگر اندازه‌ی دو بلوک یکسان بود، بلوکی که شامل ارقام 0 است، حذف می‌شود).

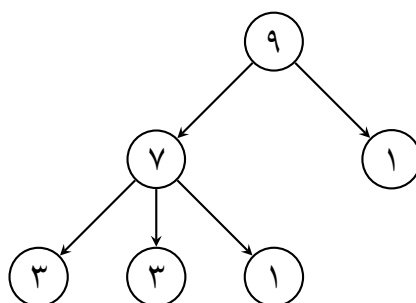
برای مثال، رشته‌ی بالا پس از یک مرحله به رشته‌ی $\langle 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$ تبدیل می‌شود. در میان تمام حالات ممکن برای رشته‌ی ۱۴ رقمی آغازین، کمینه‌ی تعداد ارقام رشته‌ی نهایی (پس از اجرای کامل الگوریتم مذکور) چیست؟

- 2 (۱) 4 (۲) 6 (۳) 5 (۴) 3 (۵)

مرحله‌ی یکم سی و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

- دنباله‌ای از اعداد طبیعی داریم. می‌خواهیم تعدادی رابطه بین اعداد این دنباله با شرایط زیر تعریف کنیم:
- در هر رابطه، دو عدد نابرابر درگیر می‌شوند که عدد بزرگ‌تر را پدر رابطه و عدد کوچک‌تر را فرزند رابطه می‌نامیم.
 - هر عدد باید حداکثر در یک رابطه، نقش فرزند را داشته باشد.
 - مجموع فرزندان هر عدد باید کم‌تر یا مساوی خودش باشد.

به یک عدد بدسگال گوییم، اگر در هیچ رابطه‌ای فرزند نباشد. هدف، تعریف تعدادی رابطه بین اعداد دنباله است، طوری که تعداد عددهای بدسگال کمینه شود. به عنوان مثال، اگر دنباله‌ی اعداد برابر $\langle 1, 1, 3, 3, 7, 9 \rangle$ باشد، می‌توانیم به شکل زیر، رابطه‌ها را طوری تعریف کنیم که فقط یک عدد بدسگال داشته باشیم (هر پاره‌خط جهت‌دار نشان‌گر یک رابطه است که از پدر به فرزند کشیده شده است):



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۴ اگر دنباله‌ی اعداد برابر $\langle 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5 \rangle$ باشد، حداقل چند عدد بدسگال خواهیم داشت؟

- ۵ (۵) ۱ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲) ۲ (۱)

۱۵ الگوریتم‌های زیر را در نظر بگیرید:

- (آ) دنباله‌ی اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می‌کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند کوچک‌ترین پدر ممکن قرار می‌دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی‌دهیم و در نتیجه، بدسگال می‌شود).
- (ب) دنباله‌ی اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می‌کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند بزرگ‌ترین پدر ممکن قرار می‌دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی‌دهیم و در نتیجه، بدسگال می‌شود).
- (پ) دنباله‌ی اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب، و سپس آن را پیمایش می‌کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، با بررسی تمام حالات ایجاد رابطه بین این عدد و اعداد بدسگال کنونی کوچک‌تر از آن، بیش‌ترین تعداد بدسگال ممکن را (مطابق با شرایط مسئله)، فرزند عدد فعلی قرار می‌دهیم.

کدام الگوریتم‌ها به ازای هر دنباله‌ی اولیه‌ای از اعداد، کم‌ترین تعداد بدسگال ممکن را ایجاد می‌کنند؟

- (۱) ب و پ (۲) آ و پ (۳) هر سه (۴) هیچ کدام (۵) فقط پ