- زمان آزمون ۱۲۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۷ تا ۱۵ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ چهار خودرو در یک مسیر، مسابقه می‌دهند. خودروها در ابتدای مسابقه، از جلو به عقب به ترتیب با ۱ تا ۴ شماره‌گذاری شده‌اند. می‌دانیم در طول مسابقه مجموعاً دو بار عمل سبقت رخ می‌دهد (در هر عمل سبقت، یک خودرو از خودروی جلویی سبقت می‌گیرد). در انتهای مسابقه، چند ترتیب مختلف از خودروها برای عبور از خط پایان می‌تواند وجود داشته باشد (ترتیب انجام سبقت‌ها مهم نیست و صرفاً وضعیت نهایی خودروها مهم است)؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۵ ۴) ۶ ۵) ۹

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

گوییم یک خودرو در یک سبقت حضور دارد، اگر با آن سبقت، مکانش در جایگشت عوض شود. دو حالت داریم:

- هیچ خودرویی در هر دو سبقت حضور نداشته باشد: در این صورت باید یک عمل سبقت بین دو خودروی شماره ۳ و ۴، و یک عمل سبقت بین دو خودروی شماره ۱ و ۲ انجام شود که جایگشت نهایی یکتاست:

$$\langle ۲, ۱, ۴, ۳ \rangle$$

- دقیقاً یک خودرو در هر دو سبقت حضور داشته باشد: در این صورت آن خودرو در طی دو مرحله، دو واحد به جلو یا دو واحد به عقب می‌رود. با انتخاب این خودرو، جایگشت نهایی به صورت یکتا تعیین می‌شود (در مجموع ۴ حالت).
- دو خودرو در هر دو سبقت حضور داشته باشند: در این صورت یک خودرو از دیگری سبقت گرفته و سپس دوباره جایشان را عوض می‌کنند. در این صورت جایگشت نهایی یکتا و برابر جایگشت اولیه است.

پس پاسخ برابر

$$۱ + ۴ + ۱ = ۶$$

است. □

۲ امین در یک آزمون با تعدادی سوال پنج گزینه‌ای شرکت کرده است. پاسخ درست به هر سوال، چهار امتیاز مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال، یک امتیاز منفی دارد؛ هم‌چنین برای سوالات نزده (سوالاتی که امین به آن‌ها پاسخ نداده)، صفر امتیاز در نظر گرفته می‌شود. امین برای ۱۰ سوال از آزمون، پس از حذف قطعی سه گزینه، بین دو گزینه‌ی دیگر به صورت تصادفی و با احتمال برابر یکی را انتخاب کرده است. پس از اتمام آزمون، امین شک کرد که شاید بهتر بود تمام آن ۱۰ سوال را نزده باقی می‌گذاشت. احتمال آن که امین از مجموع این ۱۰ سوال امتیاز منفی دریافت کند چه‌قدر است؟

۱) بین ۱۰ تا ۲۰ درصد ۲) بین ۵ تا ۱۰ درصد ۳) بین ۲۰ تا ۵۰ درصد ۴) کم‌تر از ۵ درصد ۵) بیش از ۵۰ درصد

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

اگر به k سوال از ۱۰ سوال، پاسخ درست و به $۱۰-k$ سوال، پاسخ نادرست داده شود، نمره‌ی کسب شده از این ۱۰ سوال برابر

$$۴k-(۱۰-k)=۵k-۱۰$$

خواهد بود. این مقدار فقط به ازای $k=۰$ و $k=۱$ منفی می‌شود. پس باید احتمال آن را محاسبه کنیم که تعداد پاسخ‌های درست، دقیقاً ۰ یا ۱ باشد. این مقدار برابر

$$\frac{۱+۱۰}{۲^{۱۰}}$$

است که از ۵ درصد کم‌تر می‌باشد. □

۳ یک تیم، شش نفر با شماره‌های ۱ تا ۶ دارد. می‌دانیم:

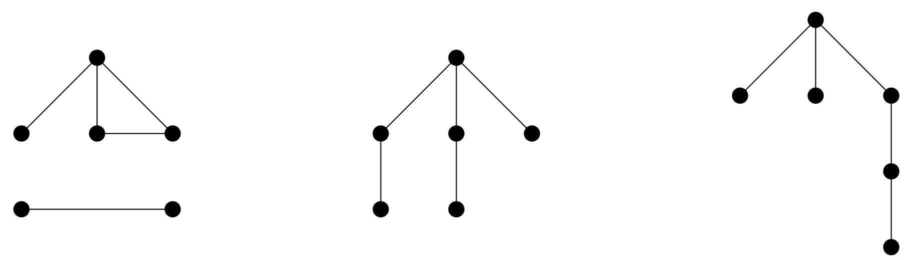
- سه نفر از اعضای تیم، هر کدام، یک دوست درون تیم دارند.
- دو نفر از اعضای تیم، هر کدام، دو دوست درون تیم دارند.
- یک نفر از اعضای تیم، سه دوست درون تیم دارد.

دوستی‌های بین افراد تیم، دوطرفه است (یعنی اگر A دوستِ B باشد، B نیز دوستِ A است). چند حالت مختلف از دوستی این افراد با شرایط گفته شده وجود دارد؟ دو حالت را متفاوت گوییم، اگر دو نفر مانند X و Y وجود داشته باشند که در یک حالت، دوست باشند و در حالت دیگر، دوست نباشند.

۱) ۷۲۰ ۲) ۱۰۰۰ ۳) ۹۰۰ ۴) ۳۶۰ ۵) ۱۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

پاسخ مسئله برابر تعداد گراف‌های ساده با رأس‌های ۱ تا ۶ و دنباله‌ی درجات $\langle ۱,۱,۱,۲,۲,۳\rangle$ است. با در نظر گرفتن رأس درجه ۳ و حالت‌بندی روی یال‌های سایر رأس‌ها، در حد یکریختی تنها سه گراف زیر وجود دارد:



جایگشت دادن رأس‌ها در سه گراف بالا به ترتیب از راست به چپ $\frac{۶!}{۲}=۳۶۰$، $۶\times۵\times\binom{۴}{۲}\times۲=۳۶۰$ و $۶\times\binom{۵}{۲}\times۳=۱۸۰$ حالت دارد. پس پاسخ برابر $۳۶۰+۳۶۰+۱۸۰=۹۰۰$ است. □

۴ امیرمحمد و سینا با هم یک بازی می‌کنند. امیرمحمد در جاده‌ای راه می‌رود و سینا او را دنبال می‌کند. آن‌ها از قبل، شش اسکناس با ارزش‌های $\langle ۹,۱۰,۳,۶,۳,۸\rangle$ را به ترتیب (از چپ به راست) در طول جاده انداخته‌اند. هر کسی زودتر به اسکناسی برسد می‌تواند آن را بردارد، ولی فرد عقب‌تر از او جلو می‌زند و ترتیب دو نفر عوض می‌شود. اگر فرد جلوتر اسکناس را برندارد، فرد عقب‌تر می‌تواند اسکناس را بردارد و ترتیب دو نفر هم عوض نمی‌شود. هر کسی می‌خواهد بیش‌ترین پول را برای خود جمع کند. حداکثر پولی که امیرمحمد می‌تواند در انتها جمع کند چه‌قدر است؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۳ ۵) ۲۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

به ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۶$ مقدار $f(i)$ را برابر پاسخ مسئله در حالتی در نظر می‌گیریم که فقط سکه‌های iاُم تا ششم را داشته باشیم. هم‌چنین به ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۶$ مقدار $g(i)$ را مشابه $f(i)$ تعریف می‌کنیم، با این تفاوت که در ابتدا سینا جلوتر باشد. اگر ارزش سکه‌ی iاُم را با $C(i)$ نشان دهیم، با حالت‌بندی روی برداشتن یا برنداشتن سکه‌ی آغازین توسط نفر جلوتر، داریم:

$$f(i) = max\big(f(i+۱), A[i] + g(i+۱)\big) \qquad g(i) = min\big(f(i+۱), A[i] + g(i+۱)\big)$$

بنابراین:

$$f(۶) = ۹, g(۶) = ۰$$

$$\Rightarrow f(۵) = ۱۰, g(۵) = ۹$$

$$\Rightarrow f(۴) = ۱۲, g(۴) = ۱۰$$

$$\Rightarrow f(۳) = ۱۶, g(۳) = ۱۲$$

$$\Rightarrow f(۲) = ۱۶, g(۲) = ۱۵$$

$$\Rightarrow f(۱) = ۲۳, g(۱) = ۱۶$$

پاسخ برابر $f(۱) = ۲۳$ است. □

۵ یک آب‌خوری با سه شیر آب در حیاط وجود دارد. سرعت آب ورودی به این آب‌خوری ثابت است، به این صورت که:

- اگر فقط یک شیر آب باز باشد، یک بطری را در پنج دقیقه پُر می‌کند.
- اگر دو شیر آب باز باشند، هر یک از آن‌ها نصف یک بطری را در پنج دقیقه پر می‌کند.
- اگر هر سه شیر آب باز باشند، هر شیر آب، $\frac{۱}{۳}$ یک بطری را در پنج دقیقه پر می‌کند.

سارا ساعت ۰۰ : ۰۰ : ۸ شروع به پر کردن بطری‌اش می‌کند که دو دقیقه پس از آن، هستی به آب‌خوری می‌رود و شیر دیگری را باز می‌کند تا بطری‌اش را پر کند. زهرا سه دقیقه بعد از هستی به آب‌خوری می‌رود. زهرا می‌تواند هر موقع که خواست شیر سوم را باز کند و شروع به پر کردن بطری‌اش کند. زودترین زمانی که او می‌تواند پر کردن بطری‌اش را به پایان برساند، کدام است؟ توجه کنید که اندازه‌ی تمام بطری‌ها یکسان است و هم‌چنین هر کسی که بطری‌اش به طور کامل پر شود، همان لحظه شیر آبی را که باز کرده، می‌بندد.

۱) ۰۰ : ۱۵ : ۸ ۲) ۳۰ : ۱۲ : ۸ ۳) ۰۰ : ۲۰ : ۸ ۴) ۵۰ : ۱۷ : ۸ ۵) ۰۰ : ۱۷ : ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

مجموعاً باید سه بطری پر بشوند. با توجه به این که هر پنج دقیقه، دقیقاً به اندازه‌ی یک بطری آب از شیرها خارج می‌شود، پس دقیقاً ۱۵ دقیقه طول می‌کشد تا هر سه بطری پر بشوند. □

۶ در ابتدا مقادیر زیر را داریم:

$$A[۰] = ۴۰ \qquad A[۱] = ۱۲ \qquad A[۲] = ۱۰ \qquad A[۳] = ۲۱ \qquad A[۴] = ۱۷$$

الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

۱. مقدار sum را برابر ۰ قرار بده.
۲. به ازای k از ۱ تا ۵ انجام بده:
  ۲-۱. به ازای i از ۰ تا ۴ انجام بده:
    ۲-۱-۱. j را برابر i قرار بده.
    ۲-۱-۲. تا وقتی j از ۵ کم‌تر است انجام بده:
      ۲-۱-۲-۱. مقدار sum را به اندازه‌ی $A[j]$ زیاد کن.
      ۲-۱-۲-۲. مقدار j را به اندازه‌ی k زیاد کن.

در انتهای اجرای الگوریتم، مقدار sum چه خواهد بود؟

۱) ۷۸۳ ۲) ۱۰۰ ۳) ۸۵۶ ۴) ۲۳۲ ۵) ۵۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

به ازای هر k، عدد mاُم دقیقاً $\lceil \frac{m+1}{k} \rceil$ بار به sum اضافه خواهد شد (زیرا دقیقاً به همین تعداد i وجود دارد که با شروع از آن‌ها و اضافه کردن k تا k تا به آن، به m می‌رسیم). پس عدد mاُم در مجموع به مقدار زیر به sum اضافه خواهد کرد:

$$\lceil \frac{m+۱}{۱} \rceil + \lceil \frac{m+۱}{۲} \rceil + \ldots + \lceil \frac{m+۱}{۵} \rceil$$

پس پاسخ برابر است با:

$$۴۰ \times ۵ + ۱۲ \times ۶ + ۱۰ \times ۸ + ۲۱ \times ۱۰ + ۱۷ \times ۱۳ = ۷۸۳$$

□

در بازی شکرز، یک جدول $n \times n$ داریم، که در ابتدا روی یک خانه‌ی آن مهره‌ای سفید، و روی برخی دیگر از خانه‌ها مهره‌ای سیاه قرار دارد. در هر مرحله، مهره‌ی سفید می‌تواند به یک خانه‌ی خالی هم‌سطر یا هم‌ستون برود، به شرط آن که در مسیرِ مستقیم خانه‌ی فعلیِ مهره‌ی سفید تا خانه‌ی مقصد، دقیقاً یک مهره‌ی سیاه قرار داشته باشد. پس از حرکت مهره‌ی سفید مهره‌ی سیاهی که از روی آن پریده شده، حذف می‌شود. می‌خواهیم در ابتدا، بیش‌ترین تعداد مهره‌ی سیاه را روی جدول قرار دهیم، طوری که بتوانیم با تعدادی مرحله همه‌ی مهره‌های سیاه را از جدول حذف کنیم.

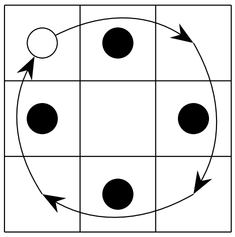
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۷ بیش‌ترین تعداد مهره‌ی سیاه به‌ازای $n = ۳$ چه‌قدر است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۳ ۴) ۴ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تنها حرکت مجاز در جدول ۳×۳ حرکت از یک گوشه به گوشه‌ای دیگر (در راستای افقی یا عمودی) است، طوری که خانه‌ی وسط این دو گوشه شامل مهره‌ای سیاه باشد. از آن‌جایی که تنها چهار خانه با این ویژگی داریم، پاسخ از ۴ بیش‌تر نیست. برای تحقق ۴ مهره‌ی سیاه نیز، مثال زیر را در نظر بگیرید:



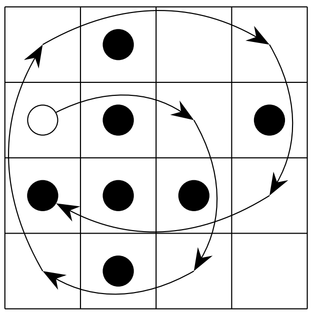
□

۸ بیش‌ترین تعداد مهره‌ی سیاه به‌ازای $n = ۴$ چه‌قدر است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

ابتدا برای ۷ مهره، روشی ارائه می‌دهیم:



توجه کنید در روش بالا، گام آخر نیز معتبر است (در لحظه‌ی انجام گام آخر، دو تا از سه مهره‌ی سیاه درون مسیر، تا آن لحظه برداشته شده‌اند).
حال ثابت می‌کنیم پاسخ نمی‌تواند از ۷ بیش‌تر باشد. خانه‌ها را به شکل زیر، به سه دسته‌ی گوشه‌ای، حاشیه‌ای و میانی تقسیم می‌کنیم:

گوشه‌ای	حاشیه‌ای	حاشیه‌ای	گوشه‌ای
حاشیه‌ای	میانی	میانی	حاشیه‌ای
حاشیه‌ای	میانی	میانی	حاشیه‌ای
گوشه‌ای	حاشیه‌ای	حاشیه‌ای	گوشه‌ای

- مهره‌ی سیاهی که در خانه‌های گوشه باشد، نمی‌تواند برداشته شود.
- اگر تمام چهار خانه‌ی میانی، مهره‌ی سیاه داشته باشند، هیچ کدامشان قابل استفاده نیستند. پس حداکثر از سه مهره‌ی سیاه در خانه‌های میانی می‌توان بهره برد.
- اگر دو خانه‌ی حاشیه‌ای مجاور، مهره‌ی سیاه داشته باشند، هیچ کدامشان قابل استفاده نیستند. پس حداکثر از چهار مهره‌ی سیاه در خانه‌های حاشیه‌ای می‌توان بهره برد.

پس تعداد مهره‌های سیاه از برابر $۷ = ۴ + ۳ + ۰$ نمی‌تواند بیش‌تر باشد. □

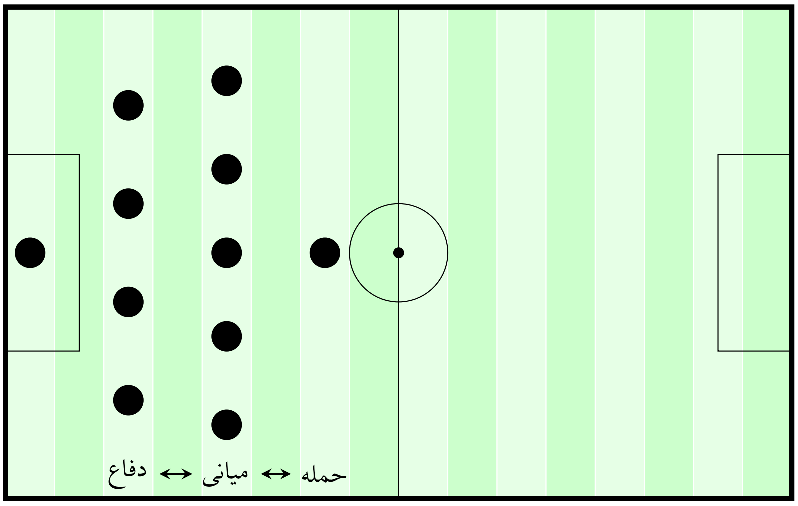
در این دسته سوال، با یک تیم فوتبال سر و کار داریم که ۱۱ بازی‌کن در آن عضو هستند. در یک چینش تیم، بازی‌کن‌ها در ۱۱ جایگاه متمایز قرار می‌گیرند. آن‌ها در ابتدا در یک چینش اولیه قرار گرفته‌اند. بازی‌کن‌های تیم می‌توانند جابه‌جا شوند و یک چینش جدید بسازند. چینش جدید می‌تواند همان چینش اولیه هم باشد. می‌خواهیم تعداد چینش‌های جدید تیم با شرایط گفته شده در هر سوال را حساب کنیم. دو چینش را متمایز در نظر می‌گیریم، اگر جایگاهی وجود داشته باشد که بازی‌کن آن جایگاه، در این دو چینش متفاوت باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۹ در این سوال، به جز دروازه‌بان، چهار بازی‌کن در خط دفاع، پنج بازی‌کن در خط میانی و یک بازی‌کن در خط حمله حضور دارند. جایگاه‌های مجاز هر بازی‌کن در چینش جدید، به صورت زیر است:

- دروازه‌بان چینش اولیه، باید سر جایش باقی بماند.
- هر بازی‌کن خط دفاع از چینش اولیه، می‌تواند در یکی از جایگاه‌های خط دفاع یا خط میانی بازی کند.
- هر بازی‌کن خط میانی از چینش اولیه، می‌تواند در تمام جایگاه‌ها به جز جایگاه دروازه‌بان بازی کند.
- هر بازی‌کن خط حمله از چینش اولیه، می‌تواند در یکی جایگاه‌های خط میانی یا خط حمله بازی کند.

با این شرایط، چند چینش جدید برای تیم وجود دارد؟



۱) ۱۳۷۰۸۸۰ ۲) ۳۶۲۸۸۰۰ ۳) ۳۲۶۵۹۲۰ ۴) ۱۰۰۸۰۰۰ ۵) ۹۲۱۶۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

دروازه‌بان باید سر جایش بماند. برای سایر جایگاه‌ها دو حالت داریم:

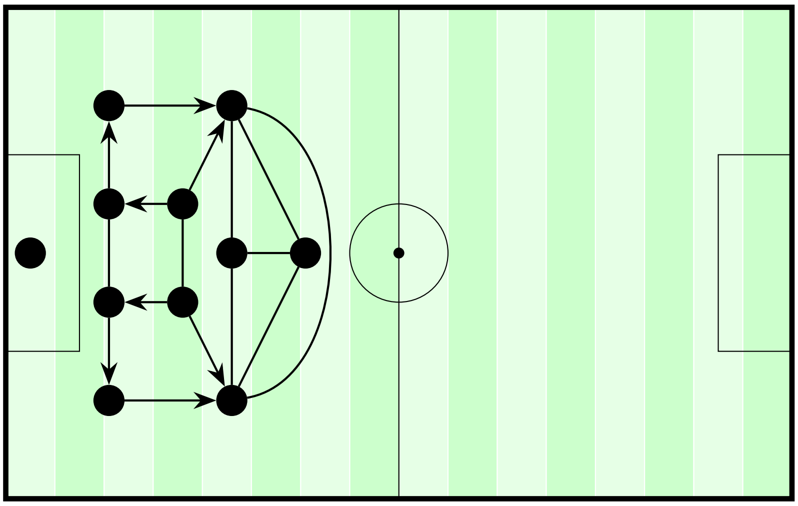
- بازیکن خط حمله سر جایش بماند: در این صورت تمام جایگاه‌های باقی‌مانده برای تمام بازیکنان باقی‌مانده مجاز است و $9! = 362880$ چینش داریم.
- بازیکن خط حمله سر جایش نماند: در این صورت، انتخاب جایگاه جدید برای بازیکن خط حمله ۵ حالت دارد (یکی از جایگاه‌های خط میانی). جایگاه خط حمله را نیز باید یکی از بازیکنان سابق خط میانی پر کند (به ۵ حالت). برای سایر بازیکنان، تمام جایگاه‌های باقی‌مانده مجاز است. پس در این حالت $5 \times 5 \times 8! = 1008000$ چینش داریم.

پس پاسخ برابر $362880 + 1008000 = 1370880$ است. □

۱۰ در این سوال، مطابق شکل زیر، هر بازی‌کن مانند P می‌تواند در جایگاه‌های زیر بازی کند:

- در جایگاه خودش در چینش اولیه
- در جایگاه بازی‌کن‌هایی مانند Q که P و Q در شکل، با خطی بدون جهت به هم وصل شده باشند.
- در جایگاه بازی‌کن‌هایی مانند Q که در شکل، خطی جهت‌دار از P به Q موجود باشد.

با این شرایط، چند چینش جدید برای تیم وجود دارد؟



۱) ۱۰۲۴ ۲) ۲۴ ۳) ۴۸ ۴) ۹۶ ۵) ۷۲۰

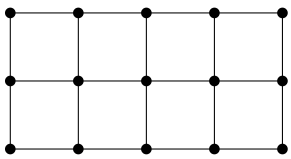
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

دروازه‌بان سر جایش می‌ماند و جایگاهش ۱ حالت دارد. دو هافبک دفاعی باید باز هم هافبک دفاعی بمانند، زیرا بازیکنان جایگاه‌های دیگر نمی‌توانند به جای آن‌ها بازی کنند. پس جایگاه این دو بازیکن ۲ حالت دارد.
حال، مدافعان میانی را در نظر بگیرید. با استدلال مشابه، این دو نفر نیز باید مدافع میانی بمانند و جایگاهشان ۲ حالت دارد.
با استدلال مشابه، مدافعان کناری نیز باید سر جایشان بمانند و جایگاهشان ۱ حالت دارد.
بازیکنان باقی‌مانده در هر یک از جایگاه‌های باقی‌مانده می‌توانند قرار بگیرند و چینش آن‌ها !۴ حالت دارد.
پس پاسخ برابر

$$۲ \times ۲ \times ۴! = ۹۶$$

است. □

شبکه‌ی ۵×۳ زیر را در نظر بگیرید. به دو نقطه مجاور می‌گوییم اگر با یک پاره‌خط مستقیم (بدون عبور از نقطه‌ای دیگر)، به هم وصل شده باشند.



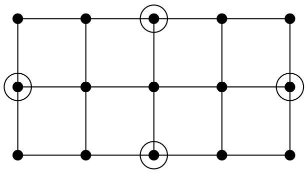
با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۱ حداقل چند نقطه را باید علامت بزنیم، به طوری که هر نقطه‌ی بی‌علامت با حداقل یک نقطه‌ی علامت‌دار، مجاور باشد؟

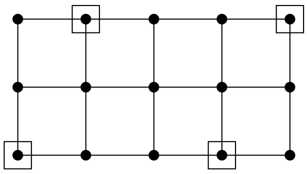
۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۶ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ابتدا روشی با چهار نقطه‌ی علامت‌دار ارائه می‌کنیم:



حال ثابت می‌کنیم پاسخ نمی‌تواند از چهار کم‌تر باشد. گوییم نقطه‌ی علامت‌دار A، نقطه‌ی B را پوشش می‌دهد، اگر B مجاور A یا روی آن باشد (از این تعریف در پاسخ دو سوال بعدی نیز استفاده خواهیم کرد). هر نقطه‌ی علامت‌دار، حداکثر یکی از چهار نقطه‌ی مشخص شده در شکل زیر را پوشش می‌دهد.



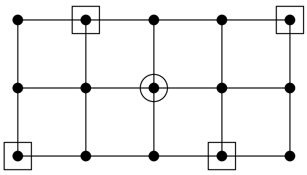
پس به حداقل چهار نقطه‌ی علامت‌دار نیاز داریم. □

۱۲ پاسخ سوال قبل را k نقطه در نظر بگیرید. به چند روش می‌توانیم k نقطه را علامت بزنیم، به طوری که هر نقطه‌ی بی‌علامت با حداقل یک نقطه‌ی علامت‌دار، مجاور باشد؟

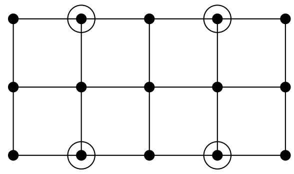
۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۳ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

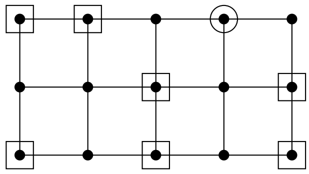
با توجه به پاسخ سوال قبل، می‌دانیم $k = ۴$ است. ابتدا ثابت می‌کنیم نقطه‌ی وسط نمی‌تواند علامت‌دار باشد. چهار نقطه‌ی مشخص شده با علامت مربع در شکل زیر، توسط نقطه‌ی وسط پوشش داده نمی‌شوند و هم‌چنین هر نقطه‌ی علامت‌دار، حداکثر یکی از آن‌ها را پوشش می‌دهد:



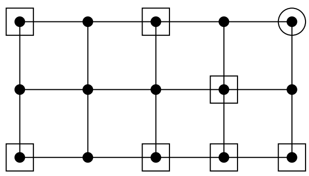
پس اگر نقطه‌ی وسط علامت‌دار باشد، در مجموع دست کم پنج نقطه‌ی علامت‌دار خواهیم داشت که مطلوب نیست. پس نقطه‌ی وسط علامت‌دار نیست.
حال ثابت می‌کنیم هیچ یک از چهار نقطه‌ی مشخص شده با علامت دایره در شکل زیر نیز نمی‌توانند علامت‌دار باشند:



از برهان خلف استفاده می‌کنیم و بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید نقطه‌ی مشخص شده با علامت دایره در شکل زیر، علامت‌دار باشد:



نقطه‌ی گفته شده هیچ یک از نقاط مشخص شده با علامت مربع را پوشش نمی‌دهد. هم‌چنین هر نقطه‌ی علامت‌دار حداکثر دو نقطه‌ی مشخص شده با علامت مربع را پوشش می‌دهد. پس در مجموع به دست کم $۵ = \lceil \frac{۷}{۲} + ۱ \rceil$ نقطه‌ی علامت‌دار نیاز داریم که مطلوب نیست. بنابراین هیچ یک از چهار نقطه‌ی مذکور نمی‌توانند علامت‌دار باشند.
حال ثابت می‌کنیم هیچ یک از چهار نقطه‌ی گوشه نیز نمی‌توانند علامت‌دار باشند. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید نقطه‌ی بالا ـ راست علامت‌دار باشد. این نقطه، هیچ یک از نقاط مشخص شده با علامت مربع در شکل زیر را پوشش نمی‌دهد و هم‌چنین هر نقطه‌ی علامت‌دار، حداکثر دو تا از نقاط مشخص شده با علامت مربع در شکل زیر را پوشش می‌دهند (با توجه به این که برای برخی از نقاط، ثابت کردیم علامت‌دار نیستند):



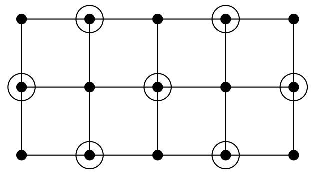
پس اگر نقطه‌ی بالا ـ راست علامت‌دار باشد، در مجموع به دست کم $۵ = \lceil \frac{۷}{۲} + ۱ \rceil$ نقطه‌ی علامت‌دار نیاز داریم که مطلوب نیست. بنابراین هیچ یک از نقاط گوشه نمی‌توانند علامت‌دار باشند.
پس تنها چهار خانه‌ی کاندید برای علامت‌دار شدن باقی می‌ماند که باید همگی علامت‌دار باشند. این حالت معتبر است (روش پاسخ سوال قبل). پس دقیقاً یک روش برای علامت‌دار کردن نقاط داریم و پاسخ مسئله برابر ۱ است. □

۱۳ حداقل چند نقطه را باید علامت بزنیم، به طوری که هر نقطه‌ی بی‌علامت با حداقل دو نقطه‌ی علامت‌دار، مجاور باشد؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۵ ۵) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

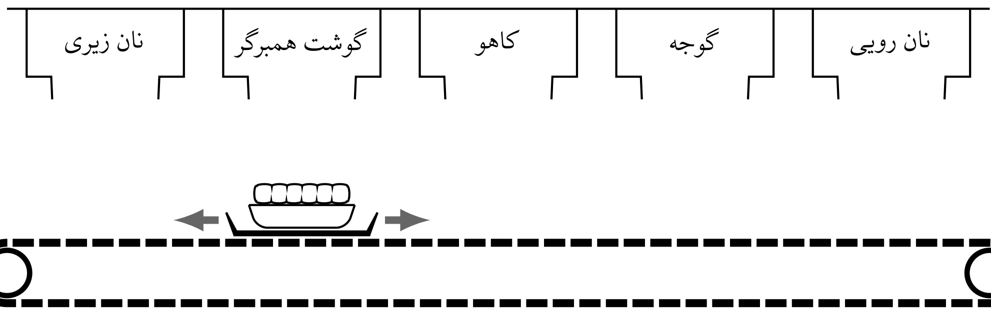
ابتدا برای ۷ نقطه‌ی علامت‌دار، روش زیر را ارائه می‌دهیم:



با حالت‌بندی روی تعداد خانه‌های گوشه‌ی علامت‌دار نیز به سادگی می‌توانید ثابت کنید با کم‌تر از ۷ نقطه‌ی علامت‌دار، این امر ممکن نیست. □

سندی‌سنجابه برای رستوران آقای خرچنگ، یک دستگاه برگرساز جدید ساخته است. مطابق شکل زیر، این دستگاه پنج مخزن مواد غذایی دارد که در یک ردیف، بالای یک تسمه‌ی متحرک قرار گرفته‌اند. مخزن‌ها به ترتیب از چپ به راست دارای نان زیری همبرگر، گوشت همبرگر، کاهو، گوجه، و نان رویی همبرگر هستند. برای درست کردن یک همبرگر، باب‌اسفنجی (سرآشپز رستوران) ابتدا باید یک سینی را روی تسمه‌ی متحرک و دقیقاً زیر خروجی چپ‌ترین مخزن (نان زیری) قرار دهد. دستگاه دو دکمه دارد که باب‌اسفنجی با فشردن آن‌ها، سینی را (در صورت امکان) یک واحد به راست یا چپ حرکت می‌دهد. هر دفعه که سینی، زیر خروجی یک مخزن قرار بگیرد، یک واحد از ماده‌ی غذایی آن مخزن، به صورت خودکار به روی سینی، بالای مواد قبلی (در صورت وجود) افزوده می‌شود. به این ترتیب، هر همبرگر از تعدادی طبقه (ماده‌ی غذایی) تشکیل می‌گردد. نان‌های زیری و رویی همبرگر نیز جزء طبقات محسوب می‌شوند. بنا به دستور آقای خرچنگ، هر همبرگر لازم است دو ویژگی زیر را داشته باشد:

- ماده‌ی هیچ دو طبقه‌ی متوالی آن یکسان نباشند.
- پایین‌ترین طبقه‌ی آن، یک نان زیری، و بالاترین طبقه‌ی آن یک نان رویی باشد و در طبقه‌ی دیگری، از نان استفاده نشده باشد.



با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۴ باب‌اسفنجی چند همبرگر ۱۵ طبقه‌ی متفاوت می‌تواند با این دستگاه درست کند؟

۱) ۸۱ ۲) ۶۲۵ ۳) ۱۲۸ ۴) ۳۲ ۵) ۳۶۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با توجه به این که هر بار، سینی به زیر یک مخزن مجاور می‌رود، در طبقات با شماره‌ی فرد، فقط می‌توانیم نان یا کاهو، و در طبقات زوج، فقط می‌توانیم گوشت همبرگر یا گوجه داشته باشیم. ماده‌ی طبقات فرد به طور یکتا

تعیین می‌شود؛ زیرا طبقات اول و آخر باید به ترتیب شامل نان زیری و نان رویی باشند و سایر طبقات فرد، کاهو دارند. طبقه‌ی دوم و چهاردهم نیز به طور یکتا تعیین می‌شود؛ زیرا باید به ترتیب شامل گوشت همبرگر و گوجه باشند. هر کدام از سایر طبقات زوج (طبقات چهارم، ششم، هشتم، دهم و دوازدهم) می‌توانند گوشت همبرگر یا گوجه داشته باشند. پس پاسخ برابر $۳۲ = ۲^۵$ است. □

۱۵ به دلیل استقبال مشتریان از همبرگرها، سندی‌سنجابه دستگاه را ارتقا داده و یک مخزن پنیر را بین مخزن گوشت همبرگر و مخزن کاهو اضافه کرده است. با دستگاه همبرگرساز جدید، باب‌اسفنجی چند همبرگر ۸ طبقه‌ی متفاوت می‌تواند درست کند؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۳ ۴) ۱ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

در حین فرآیند، سینی دقیقاً یک بار باید به چپ برود تا تعداد طبقات دقیقاً ۸ شود. انتخاب جایی که سینی به چپ می‌رود، ۳ حالت دارد. □