- زمان آزمون ۱۲۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- سوالات ۷ تا ۱۵ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ **جبیارا** سیاره‌ای شامل موجودات فرازمینی است. هر سال در این سیاره شامل ۱۶ ماه ۳۲ روزه است. ساکنین جبیارا تاریخ را در دو قالب «روز/ماه/سال» و «ماه/روز/سال» می‌نویسند. این کار باعث می‌شود برخی اوقات نتوانند روز دقیق را از روی تاریخ نوشته شده تشخیص دهند (برای مثال «۱۲۰۰/۴/۱۲» مشخص نیست که به روز دوازدهم ماه چهارم اشاره می‌کند یا به روز چهارم ماه دوازدهم). در جبیارا به یک روز **مقدس** گویند، اگر از تاریخ نوشته شده‌ی آن روز (بدون دانستن نوع قالب نوشته شده)، بتوان روز را به طور یکتا تشخیص داد. در جبیارا، طی سال ۱۴۰۲ چند روز مقدس وجود دارد؟

۱) ۵۱۲ ۲) ۷۶۸ ۳) ۲۷۲ ۴) ۲۵۶ ۵) ۳۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

دو دسته روز مقدس داریم:

- شماره‌ی روز بیش‌تر یا مساوی ۱۷ باشد: تعداد این روزها در سال برابر $۱۶ \times ۱۶ = ۲۵۶$ است.
- شماره‌ی روز با شماره‌ی ماه برابر باشد: تعداد این روزها در سال (که در قسمت قبلی شمرده نشده‌اند)، برابر ۱۶ است.

پس پاسخ برابر $۲۵۶ + ۱۶ = ۲۷۲$ می‌باشد. □

۲ به هنگام جمع کردن دو عدد، **ده بر یک** وقتی رخ می‌دهد که جمع دو رقم متناظر از ۹ بیش‌تر شود. برای مثال به هنگام جمع کردن دو عدد ۱۵۳ و ۶۹ ارقام ۵ (از عدد اول) و ۶ (از عدد دوم) ده بر یک می‌سازند. می‌خواهیم دو عدد پنج‌رقمی A و B انتخاب کنیم، طوری که اولاً هر یک از ارقام ۰ تا ۹ دقیقاً یک بار در یکی از این دو عدد به کار رفته باشد؛ ثانیاً به هنگام جمع کردن این دو عدد، ده بر یک رخ ندهد. به چند طریق این کار ممکن است؟

۱) ۱۴۴۰۰ ۲) ۳۲ ۳) ۳۰۷۲ ۴) ۳۸۴۰ ۵) ۱۲۸

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

رقم ۹ تنها می‌تواند متناظر با رقم ۰ باشد (زیرا با بقیه‌ی ارقام، ده بر یک می‌سازد). انتخاب جایگاه این دو رقم، چهار حالت و انتخاب این که کدام‌یک در عدد A استفاده شود، دو حالت دارد. در بین ارقام باقی‌مانده، رقم ۸ تنها می‌تواند با رقم ۱ متناظر باشد. انتخاب جایگاه و ترتیب این دو رقم در دو عدد نیز به ترتیب چهار و دو حالت دارد. به همین ترتیب می‌توان برای ارقام بعدی نیز استدلال مشابهی ارائه داد. بنابراین پاسخ برابر است با:

$$(۴ \times ۲) \times (۴ \times ۲) \times (۳ \times ۲) \times (۲ \times ۲) \times (۱ \times ۲) = ۳۰۷۲$$

□

۳ یک فروشگاه برای خریداران باتری پیشنهاد ویژه‌ای در نظر گرفته است. خریداران پس از مصرف، با برگرداندن هر سه باتری خالی (مصرف شده) به فروشگاه، یک باتری نو به صورت مجانی می‌گیرند. اگر قیمت هر باتری هزار تومان باشد، حداقل چند هزار تومان پول نیاز داریم تا بتوانیم ۱۰۸۴ باتری مصرف کنیم؟

۱) ۷۲۳ ۲) ۷۲۹ ۳) ۸۱۰ ۴) ۸۱۳ ۵) ۱۰۸۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

ابتدا روشی برای خرید با ۷۲۳ هزار تومان ارائه می‌دهیم:

> ابتدا با صرف ۳ هزار تومان، سه باتری می‌خریم و آن‌ها را مصرف می‌کنیم. سپس هر بار (برای ۷۲۰ مرتبه)، با صرف ۲ هزار تومان، ۳ باتری می‌خریم (یکی از آن‌ها با برگرداندن سه باتری مصرف شده). در آخرین مرحله نیز با برگرداندن سه باتری مصرف شده، یک باتری دیگر نیز می‌خریم و مصرف می‌کنیم.

با این فرآیند، با بودجه‌ی ۷۲۳ هزار تومان می‌توانیم $۱۰۸۴ = ۱ + ۳ \times \frac{۷۲۳-۳}{۲} + ۳$ باتری تهیه و مصرف کنیم. حال ثابت می‌کنیم این کار با کم‌تر از ۷۲۳ هزار تومان ممکن نیست (هر چند در این سوال با توجه به عدم وجود گزینه‌ی کم‌تر، دانش‌آموز می‌توانست بدون اثبات نیز از حل خود مطمئن باشد). مسئله‌ی دیگری مطرح می‌کنیم که در آن با خریدن هر یک باتری، $\frac{۱}{۳}$ هزار تومان به صورت نقد به مشتری برگردانده می‌شود. در واقع قیمت هر باتری $\frac{۲}{۳}$ هزار تومان است. اگر مسئله‌ی اصلی پاسخی با بودجه‌ی k داشته باشد، مسئله‌ی مطرح شده نیز پاسخ با بودجه‌ی k دارد. برای حداکثر تعداد باتری قابل مصرف با بودجه‌ی کم‌تر یا مساوی ۷۲۲ هزار تومان در مسئله‌ی مطرح شده داریم:

$$\left\lfloor \frac{۷۲۲}{\frac{۲}{۳}} \right\rfloor < ۱۰۸۴$$

□

۴ ایلیچ می‌خواهد روی هر یک از خانه‌های جدول زیر، یکی از اعداد ۱ تا ۵ را بنویسد (الزامی ندارد اعداد نوشته شده متمایز باشند):

پس از نوشتن اعداد توسط ایلیچ، قورباغه‌ای در خانه‌ی سمت چپ جدول قرار می‌گیرد. هر مرحله قورباغه عدد خانه‌ی خود را دیده و به همان مقدار، به سمت راست می‌پرد (برای مثال اگر عدد خانه‌ی قورباغه برابر ۱ باشد، قورباغه به خانه‌ی مجاور راستی می‌پرد). اگر عدد قورباغه به قدری بزرگ باشد که خانه‌ای برای مقصد پرش وجود نداشته باشد، قورباغه نخواهد پرید. ایلیچ به چند روش می‌تواند اعداد را در خانه‌های جدول بنویسد، طوری که قورباغه پس از تعدادی گام، به خانه‌ی سمت راست جدول برسد؟

۱) ۶۲۵ ۲) ۵۶۲۵ ۳) ۳۱۲۵ ۴) ۳۲ ۵) ۶۴۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

با انتخاب هر مسیر، اعداد خانه‌های مسیر (به جز خانه‌ی آخر) به صورت یکتا تعیین می‌شود و عدد هر یک از خانه‌های دیگر پنج حالت دارد. با حالت‌بندی روی تعداد خانه‌های مسیر، پاسخ برابر است با:

$$\sum_{i=۰}^{۴} \binom{۴}{i} ۵^{۵-i} = ۵ \times \sum_{i=۰}^{۴} \binom{۴}{i} ۵^{۴-i} = ۵ \times (۵+۱)^{۴} = ۶۴۸۰$$

□

۵ به هر یک از ارقام ۰ و ۱ یک **بیت** می‌گوییم. عمل $\wedge$ روی دو بیت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$۰ \wedge ۰ = ۰ \qquad ۰ \wedge ۱ = ۰ \qquad ۱ \wedge ۰ = ۰ \qquad ۱ \wedge ۱ = ۱$$

عمل $\wedge$ بین دو عدد به این صورت انجام می‌شود که ابتدا دو عدد را در مبنای ۲ می‌نویسیم، سپس برای هر بیت متناظر عمل $\wedge$ را انجام می‌دهیم. برای مثال:

$$۶ \wedge ۱۳ = (۱۱۰)_۲ \wedge (۱۱۰۱)_۲ = (۱۰۰)_۲ = ۴$$

به ازای هر عدد طبیعی x از ۱ تا ۱۰۲۴ مقدار $x \wedge (۲x)$ را محاسبه می‌کنیم. مجموع اعداد به دست آمده چقدر است؟

۱) ۲۶۱۶۳۲ ۲) ۵۲۳۷۷۶ ۳) ۵۲۴۰۳۲ ۴) ۵۲۳۲۶۴ ۵) ۲۶۱۸۸۸

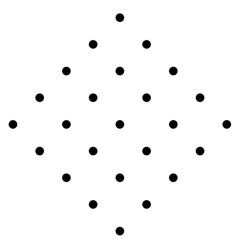
پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

برای آن که بیت iاُم (از سمت راست) در حاصل $x \wedge (۲x)$ برابر ۱ باشد، باید هر دوی بیت iاُم و $i - ۱$اُم در عدد x برابر ۱ باشند. با حالت‌بندی روی k و محاسبه‌ی مجموع بیت‌های kاُم (از سمت راست) تمام مقدارهای داده شده پاسخ برابر است با:

$$\sum_{i=۱}^{۹} ۲^۸ \times ۲^i = ۲^۸ \times \sum_{i=۱}^{۹} ۲^i = ۲^۸ \times (۲^{۱۰} - ۲) = ۲۵۶ \times ۱۰۲۲ = ۲۶۱۶۳۲$$

□

۶ شکل زیر، شبکه‌ای از ۲۵ نقطه است:



منظور از یک **امینک**، مربعی با اضلاع افقی و عمودی است که رأس‌های آن از نقاط شکل بالا باشند. در ابتدا تمام نقاط شکل بالا سیاه هستند. هر مرحله می‌توانیم یکی از دو کار زیر را انجام دهیم:

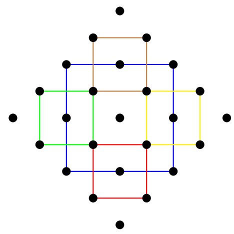
- یک نقطه‌ی سیاه را انتخاب کرده و آن را سفید کنیم.
- یک امینک انتخاب کرده و تمام نقطه‌های روی رأس‌ها و ضلع‌های آن را سفید کنیم.

حداقل چند مرحله نیاز داریم تا بتوانیم تمام نقاط شکل بالا را سفید کنیم؟

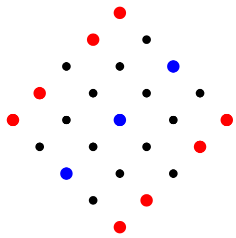
۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰ ۵) ۱۱

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

ابتدا مثالی به ازای ۱۰ مرحله ارائه می‌کنیم. پنج مربع در شکل زیر با رنگ‌های مختلف مشخص شده‌اند. پنج نقطه‌ی پوشش داده نشده توسط مربع‌ها نیز به صورت جداگانه سفید می‌شوند.

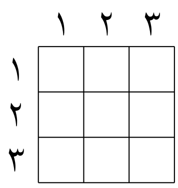


شکل زیر را در نظر بگیرید:



هر امینک شامل حداکثر یک نقطه‌ی قرمز است. همچنین هیچ امینکی نمی‌تواند هم نقطه‌ای قرمز را شامل شود و هم نقطه‌ای آبی. برای پوشش نقاط قرمز، به حداقل ۸ مرحله و برای پوشش نقاط آبی به حداقل ۲ مرحله نیاز داریم و تمام این مراحل مجزا هستند و اشتراک ندارند. □

یک جدول **شماره‌دار**، جدولی $n \times n$ است که سطرهای آن به ترتیب از بالا به پایین با اعداد ۱ تا n و ستون‌های آن نیز به ترتیب از چپ به راست با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. برای مثال، شکل زیر یک جدول شماره‌دار ۳×۳ است:



به یک جدول شماره‌دار **سلطانی** گوییم، اگر خانه‌های آن با سیاه و سفید رنگ شده باشند و همچنین به ازای هر $i, j \in \{۱, ۲, ۳\}$ سطر شماره i و ستون شماره j مجموعاً حداقل $|j - i|$ خانه‌ی سیاه داشته باشند.

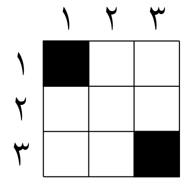
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۷ یک جدول شماره‌دار سلطانی ۳×۳ حداقل چند خانه‌ی سیاه دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۵ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

شکل زیر، روشی با دو خانه‌ی سیاه است:



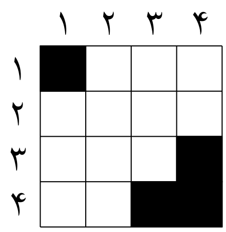
از طرفی این کار با کم‌تر از دو خانه‌ی سیاه ممکن نیست، زیرا سطر اول و ستون سوم به تنهایی روی هم حداقل دو خانه‌ی سیاه دارند. □

۸ یک جدول شماره‌دار سلطانی ۴×۴ حداقل چند خانه‌ی سیاه دارد؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۵ ۵) ۴

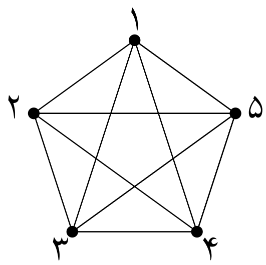
پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

شکل زیر، روشی با دو خانه‌ی سیاه است:



حال ثابت می‌کنیم این کار را با کم‌تر از چهار خانه‌ی سیاه ممکن نیست. سطر اول و ستون چهارم روی هم به حداقل سه خانه‌ی سیاه نیاز دارند. همین حرف را می‌توان برای سطر چهارم و ستون اول زد. این دو دسته حداکثر دو خانه‌ی سیاه مشترک دارند. پس در کل حداقل $۴ = ۲ - ۳ + ۳$ خانه‌ی سیاه داریم. □

در شکل زیر، پنج نقطه با شماره‌های ۱ تا ۵ داریم که تمام پاره‌خط‌های میان آن‌ها کشیده شده است:



به هر یک از پنج نقطه‌ی گفته شده یک **رأس** می‌گوییم. هر یک از پاره‌خط‌های میان رأس‌ها را نیز یک **یال** می‌نامیم. عمل **علم‌فور** شامل انتخاب چهار رأس و علامت زدن تمام یال‌های میان آن‌هاست.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۹ حداقل چند عمل علم‌فور نیاز است تا تمام یال‌ها دست کم یک بار علامت زده شوند؟

۱) ۲   ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) ۳   ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

منظور از **رأس محور** در یک عمل علم‌فور، رأسی است که بین چهار رأس انتخاب شده نباشد. ابتدا روشی با سه عمل علم‌فور ارائه می‌دهیم. کافی است در سه مرحله، به ترتیب رأس‌های ۱، ۲ و ۳ را رأس محور قرار دهیم. به این ترتیب تمام یال‌ها حداقل یک بار علامت می‌خورند. حال ثابت می‌کنیم این کار با صفر، یک یا دو عمل علم‌فور ممکن نیست. با صفر یا یک عمل علم‌فور حداکثر $\binom{۴}{۲} = ۶$ یال را می‌توان علامت زد که از تعداد یال‌های گراف کم‌تر است. حال فرض کنید با دو عمل علم‌فور کار انجام شود و در این دو عمل به ترتیب رأس‌های u و v محور باشند. در این صورت یال متصل کننده‌ی u و v علامت نمی‌خورد که تناقض است. پس به دست کم سه عمل علم‌فور نیاز است. □

۱۰ می‌خواهیم تعدادی عمل علم‌فور انجام دهیم، طوری که هر یال دقیقاً k بار علامت بخورد و k عددی طبیعی باشد. کمینه‌ی ممکن برای k چیست؟

۱) ۵   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) ۳   ۵) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

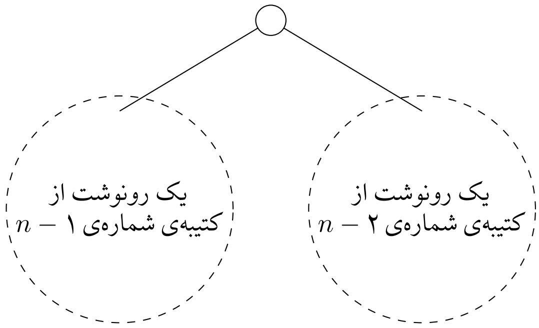
ابتدا روشی برای $k = ۳$ ارائه می‌کنیم. کافی است در پنج عمل علم‌فور، پنج رأس مختلف را محور قرار دهیم (رأس محور در پاسخ سوال قبل تعریف شده است). با این کار، هر یال دقیقاً سه بار علامت می‌خورد (در مراحلی که رأس‌های آن یال، محور نیستند). حال ثابت می‌کنیم این کار به ازای $k < ۳$ ممکن نیست. هر بار دقیقاً $\binom{۴}{۲} = ۶$ یال علامت زده می‌شوند و تعداد کل یال‌ها $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ است. پس اگر t بار عمل علم‌فور انجام شود، باید $۶t = ۱۰k$ باشد. پس باید k مضرب ۳ باشد و کار برای $k < ۳$ ممکن نیست. □

در زمان پادشاهی **سلطان**، کتیبه‌هایی نوشته شده بودند که به تازگی کشف شده‌اند. هر کتیبه از تعدادی دایره‌ی سیاه و سفید تشکیل شده که برخی از آن‌ها با پاره‌خط‌هایی به هم وصل هستند.
باستان‌شناسان متوجه شدند که کتیبه‌های سلطان با اعداد ۱، ۲، ۳ و ... شماره‌گذاری شده‌اند. هر کدام از کتیبه‌های شماره ۱ و ۲ فقط یک دایره دارند و به صورت زیر هستند:

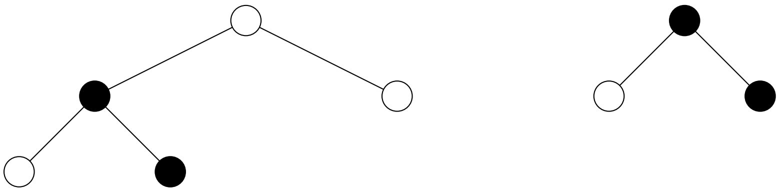
کتیبه‌ی شماره‌ی ۱

کتیبه‌ی شماره‌ی ۲

به ازای هر $n \geqslant ۳$ نیز کتیبه‌ی شماره n به شکل زیر است (که در آن دایره‌ی بالا به دایره‌های بالایی دو رونوشت از کتیبه‌های شماره‌ی $n - ۲$ و $n - ۱$ با یک پاره‌خط وصل شده است):



دایره‌ی بالایی کتیبه‌های با شماره‌ی زوج، سفید و دایره‌ی بالایی کتیبه‌های با شماره‌ی فرد، سیاه است. برای مثال، کتیبه‌های شماره ۳ و ۴ در شکل زیر قابل مشاهده است:



کتیبه‌ی شماره‌ی ۳   کتیبه‌ی شماره‌ی ۴

هر **مسیر** در یک کتیبه، از یک دایره آغاز می‌شود، هر مرحله با طی کردن یک پاره‌خط به یک دایره‌ی دیگر می‌رود تا در نهایت به دایره‌ی مقصد برسد (عبور از دایره‌ی تکراری در مسیر، مجاز نیست). توجه کنید ممکن است مسیر شامل فقط یک دایره باشد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۱ **بزرگی** یک مسیر در یک کتیبه، تعداد دایره‌های آن است. در کتیبه‌ی شماره‌ی ۷، چند مسیر با بزرگی ۳ وجود دارد؟

۱) ۳۴   ۲) ۱۲   ۳) ۶۰   ۴) ۴۱   ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر تعداد مسیرهای با بزرگی ۳ در کتیبه‌ی شماره n برابر a_n باشد، به ازای $n \geqslant ۵$ داریم:

$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} + ۵$$

زیرا در دو زیرکتیبه‌ی مربوطه به ترتیب $a_{n-۱}$ و $a_{n-۲}$ مسیر با بزرگی ۳ داریم و هم‌چنین رأس بالایی کتیبه نیز در پنج مسیر با بزرگی ۳ حضور دارد. از آن‌جایی که $a_۳ = ۱$ و $a_۴ = ۴$، آن‌گاه به ترتیب $a_۵ = ۱۰$، $a_۶ = ۱۹$ و $a_۷ = ۳۴$ خواهد بود. □

۱۲ به یک مسیر در یک کتیبه، **تکفام** گوییم، اگر تمام دایره‌های آن هم‌رنگ باشند. در کتیبه‌ی شماره‌ی ۷ چند مسیر تکفام وجود دارد؟

۱) ۲۴   ۲) ۱۳   ۳) ۵۵   ۴) ۳۸   ۵) ۴۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

b_n را بزرگی بلندترین مسیر تکفام شروع شده از رأس بالایی در کتیبه‌ی شماره‌ی n در نظر می‌گیریم. داریم $b_{۱} = b_{۲} = ۱$ و برای هر $n \geqslant ۳$:

$$b_n = b_{n-۲} + ۱$$

در نتیجه $b_n = \lceil \frac{n}{۲} \rceil$ است. حال اگر c_n را تعداد مسیرهای تکفام در کتیبه‌ی شماره‌ی n در نظر بگیریم، داریم $c_{۱} = ۱$، $c_{۲} = ۱$ و برای هر $n \geqslant ۲$:

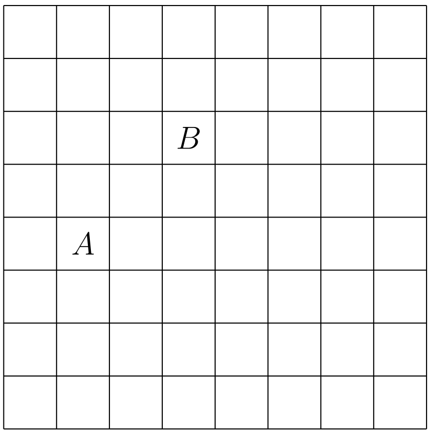
$$c_n = c_{n-۱} + c_{n-۲} + b_n$$

زیرا دو زیرکتیبه‌ی مربوطه به ترتیب $c_{n-۱}$ و $c_{n-۲}$ مسیر تکفام دارند و رأس بالایی کتیبه نیز در b_n مسیر تکفام آمده است. پس به ترتیب مقادیر زیر به دست می‌آید:

$$c_{۳} = ۴ \qquad c_{۴} = ۷ \qquad c_{۵} = ۱۴ \qquad c_{۶} = ۲۴ \qquad c_{۷} = ۴۲$$

□

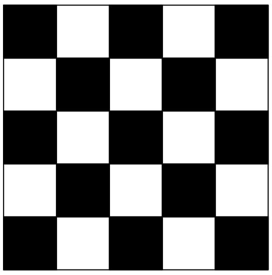
هر حرکت مهره‌ی فیل در شطرنج، با در نظر گرفتن یکی از قطرهای شامل خانه‌ی فعلی و منتقل کردن مهره به یک خانه‌ی دیگر از آن قطر انجام می‌شود. برای مثال در شکل زیر، مهره‌ی فیل می‌تواند با یک حرکت از خانه‌ی A به خانه‌ی B برود:



دو مهره‌ی فیل یک‌دیگر را تهدید می‌کنند، اگر در یک قطر قرار داشته باشند. برای مثال در شکل بالا، اگر دو مهره‌ی فیل در خانه‌های A و B وجود داشته باشد، یک‌دیگر را تهدید می‌کنند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۳ در تخته‌ی شطرنجی ۵×۵ زیر، می‌خواهیم یک مهره‌ی فیل روی یکی از خانه‌های سیاه قرار دهیم و با تعدادی حرکت، کاری کنیم که مهره‌ی فیل، تمام خانه‌های سیاه را ببیند (تمام خانه‌هایی که در مسیر یک حرکت هستند نیز توسط مهره دیده می‌شوند). مهره را حداقل چند بار باید حرکت بدهیم تا به هدفمان برسیم؟



۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۶ ۴) ۷ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

ابتدا روشی با ۹ حرکت ارائه می‌کنیم. در شکل زیر، خانه‌ی شماره‌ی i مقصد حرکت iاُم است (خانه‌ی شماره ۰، خانه‌ی آغازین می‌باشد):

۳		۷		۱
۸		۲		۶
			۵	
۰		۹		۴

حال ثابت می‌کنیم این کار با کم‌تر از ۹ حرکت ممکن نیست. کافی است ثابت کنیم با احتساب خانه‌ی آغازین، فیل باید حداقل در ۱۰ خانه مستقر شود. خانه‌های شامل عدد در شکل زیر، نمی‌توانند بدون استقرار فیل در آن‌ها دیده شوند:

۲		۳		۱
۳				۳
۱		۳		۲

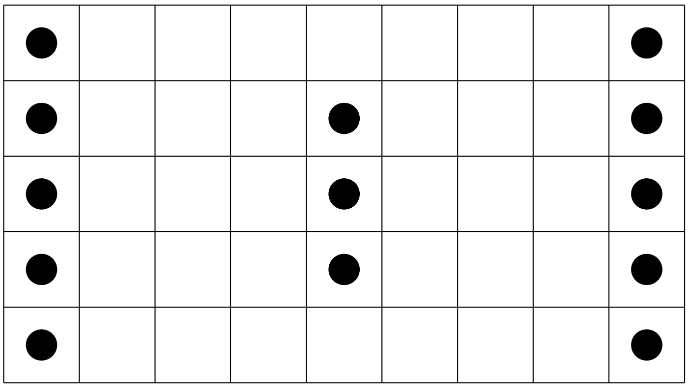
از طرفی اگر مطابق شکل بالا این هشت خانه به سه دسته تقسیم شده باشند، تغییر شماره‌ی دسته نیاز به استقرار فیل در حداقل یکی از پنج خانه‌ی سیاه دیگر دارد و به صورت مستقیم ممکن نیست. پس فیل دست کم نیاز به ۲ + ۸ استقرار دارد. □

۱۴ در یک تخته‌ی شطرنج ۹ × ۵ حداکثر چند مهره‌ی فیل می‌توان قرار داد، طوری که یک‌دیگر را تهدید نکنند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰ ۵) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

ابتدا روشی برای ۱۳ مهره‌ی فیل ارائه می‌دهیم:



حال ثابت می‌کنیم پاسخ نمی‌تواند از ۱۳ بیش‌تر باشد. خانه‌ها را به شکل زیر به ۱۳ دسته تقسیم می‌کنیم:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳

در هر دسته حداکثر یک مهره می‌تواند قرار بگیرد. پس پاسخ نمی‌تواند از ۱۳ بیش‌تر باشد. □

۱۵ پاسخ سوال قبل را k در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان k مهره‌ی فیل در خانه‌های یک تخته‌ی شطرنج ۹ × ۵ قرار داد، طوری که یک‌دیگر را تهدید نکنند؟

۱) ۲۵ ۲) ۴۲ ۳) ۱ ۴) ۳ ۵) ۷۵

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

طبق استدلال سوال قبل باید در دسته‌بندی انجام شده، در هر قطر دقیقاً یک مهره قرار بگیرد تا تعداد مهره‌ها به ۱۳ برسد. با رنگ‌آمیزی شترنجی جدول باید در دو رنگ سیاه و سفید، ۶ و ۷ فیل قرار بگیرند. با توجه به عدم تأثیر فیل‌های خانه‌های سفید روی خانه‌های سیاه و برعکس، می‌توان با حالت‌بندی، تعداد روش‌های قرارگیری فیل‌های خانه‌های هر رنگ را به صورت جداگانه حساب کرد که به ترتیب ۲۵ و ۳ حالت به دست می‌آید. پس پاسخ برابر ۷۵ = ۲۵ × ۳ است. □