سوال ۱ .... ۴۰ امتیاز

فرهاد جدولی ۱۴۰۱ × ۳۰۰ دارد که در ابتدا، تمام خانه‌های آن سفید هستند. او قصد دارد تعدادی از خانه‌های جدول را سیاه کند طوری که هر خانه‌ی سفید در جدولِ نهایی، **مجاور رأسیِ** حداقل یک خانه‌ی سیاه باشد. دو خانه‌ی متمایز، مجاور رأسی هستند اگر مرزهایشان حداقل در یک نقطه با هم اشتراک داشته باشند. مثلا در جدول زیر، خانه‌های B و C مجاور رأسیِ خانه‌ی A هستند ولی خانه‌ی D مجاور رأسیِ خانه‌ی A نیست.

C	A		D
		B	

فرهاد برای رسیدن به هدف خود می‌تواند در هر روز، یک زیرجدولِ دل‌خواه را انتخاب نماید و با استخدامِ یک نقاشِ روزمزد، تمامیِ خانه‌های آن زیرجدول را سیاه کند. منظور از یک **زیرجدول**، مجموعه‌ی خانه‌هایی است که از تلاقیِ تعدادی سطرِ متوالی و تعدادی ستونِ متوالی در جدول اصلی حاصل می‌شود. به عنوان مثال، جدولِ بالا دارای ۴ زیرجدول با ابعادِ ۳ × ۲ (حاصل تلاقیِ ۲ سطرِ متوالی و ۳ ستونِ متوالی) است. اگر ابعادِ زیرجدولِ انتخابیِ فرهاد در یک روز، $h \times w$ باشد، او باید $h \times w$ سکه (به تعداد خانه‌های زیرجدول) برای خریدِ رنگ بپردازد و علاوه بر آن، لازم است ۲ سکه نیز به عنوان هزینه‌ی استخدامِ نقاش در آن روز پرداخت نماید. مثلا اگر در یک روز، او یک زیرجدولِ ۲ × ۲ را انتخاب کند، در مجموع باید به اندازه‌ی ۲ + ۲ × ۲ = ۶ سکه در آن روز هزینه کند. لازم به ذکر است که حتی اگر برخی از خانه‌های زیرجدولِ انتخابیِ فرهاد در یک روز، از قبل سیاه باشند، تغییری در هزینه‌ی آن روزِ فرهاد ایجاد نمی‌شود.

الف) ثابت کنید فرهاد می‌تواند با پرداختِ ۱۴۰۱۰۰ سکه، به هدف خود برسد. (۲۰ امتیاز)

ب) ثابت کنید فرهاد نمی‌تواند با هزینه‌ای کمتر از ۱۴۰۱۰۰ سکه، به هدف خود برسد. (۲۰ امتیاز)

سوال ۲.. ۳۲ امتیاز

n میز در یک ردیف، به‌ترتیب با شماره‌های ۱ تا n قرار گرفته‌اند. روی هر یک از میزهای اول و آخر (میز شماره‌ی ۱ و میز شماره‌ی n)، یک آهن‌ربای الکتریکی نصب شده است. یک توپ فلزی نیز روی یکی از n میز قرار دارد. ایراندخت قصد دارد با این وسایل بازی کند. او در هر گام از بازی، دقیقا یکی از دو آهن‌ربا را روشن می‌کند و دیگری را خاموش می کند. فرض کنید در یک گام، آهن‌ربای میزِ A روشن و آهن‌ربای دیگر خاموش باشد. در این شرایط، اگر توپ فلزی، روی همان میزِ A باشد، هیچ اتفاقی رخ نمی‌دهد؛ در غیر این صورت اگر توپ فلزی روی میزی با فاصله‌ی x از میزِ A باشد، با روشن شدنِ آهن‌ربای میزِ A در یک گام، توپ به میزِ با فاصله‌ی $\left\lfloor \frac{x}{۲} \right\rfloor$ از میزِ A می‌رود که در این توصیف، فاصله بینِ میزهای i و j برابر با $|i-j|$ است. به عنوان مثال، اگر توپ فلزی روی میزهای شماره‌ی ۷ یا شماره‌ی ۸ باشد، با روشن شدنِ آهن‌ربای میز شماره‌ی ۱ در یک گام، توپ به سمت آن حرکت می‌کند و در میزِ شماره‌ی ۴ قرار می‌گیرد.

ثابت کنید ایراندخت می‌تواند توپ فلزی را از هر میزی، با تعدادی از گام‌های مذکور، به هر میزِ دیگری منتقل کند.

سوال ۳ .... ۴۸ امتیاز

درختِ ۱۴۰۳ رأسیِ T را در نظر بگیرید که درجه‌ی هر رأس در آن، حداکثر ۳ است. البرز و بیتا می‌خواهند روی این درخت، یک بازی انجام دهند، به این صورت که البرز یکی از رأس‌های درختِ T به نامِ u را مخفیانه انتخاب می‌کند و بیتا باید این رأس را پیدا کند. در این بازی، بیتا می‌تواند تنها یک پرسش از البرز انجام دهد، به این شکل که دنباله‌ای از رأس‌ها مانندِ $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ را انتخاب کند و به صورت یک‌جا به البرز بدهد. البرز نیز در پاسخ به او، اطلاعاتی را در قالبِ k جمله به شکل زیر ارائه می‌دهد:

فاصله بین u و v_1 برابرِ d_1 است.
فاصله بین u و v_2 برابرِ d_2 است.
$\vdots$
فاصله بین u و v_k برابرِ d_k است.

لازم به یادآوری است که **فاصله** بین دو رأس در یک گراف، تعداد یال‌های کوتاه‌ترین مسیر میانِ آن دو رأس است. هم‌چنین، توجه نمایید که تنها چیزی که بیتا نمی‌داند، رأسِ u است، و او نیز مانند البرز، از ساختار درختِ T اطلاع کامل دارد. بر همین اساس، بیتا برای طراحیِ پرسشِ خود از البرز، الگوریتم زیر را ابداع کرده است:

۱- درختِ T را از یکی از برگ‌هایش (یکی از رأس‌های با درجه‌ی یک) که آن را **ریشه** می‌نامیم، آویزان می‌کنیم.

❋ با آویزان شدنِ درخت از ریشه، تعاریف زیر را داریم:

- ریشه در بالاترین سطح قرار داده می‌شود و رأس‌های دیگر، متناسب با فاصله از ریشه، در سطح‌های پایین‌تر قرار می‌گیرند.
- رأسِ y را **جدّ** رأسِ x می‌نامیم اگر مسیرِ ریشه به x، رأسِ y را نیز شامل شود.
- رأسِ y را **فرزندِ** رأسِ x می‌نامیم اگر y با x مجاور باشد ولی جدّ x نباشد (با توجه به کران بالای ۳ برای درجه‌ی رأس‌های T، هر رأس حداکثر دو فرزند دارد).
- به رأسی که دقیقا دو فرزند دارد، **دوشاخه** می‌گوییم.
- یک رأسِ دوشاخه را **ساده** می‌نامیم اگر جدّ هیچ رأسِ دوشاخه‌ی دیگری نباشد.

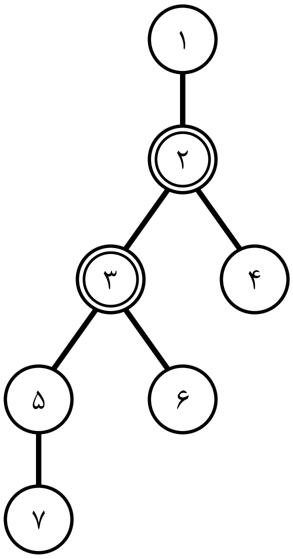
۲- رأس ریشه را رنگ می‌کنیم.

۳- تمامی رأس‌های دوشاخه‌ی ساده در درختِ آویزان‌شده را پیدا می‌کنیم.

۴- به‌ازای هر رأسِ دوشاخه‌ی ساده، دقیقا یکی از دو فرزندش را به دل‌خواه، انتخاب و آن را رنگ می‌کنیم.

۵- رأس‌های رنگ‌شده را به عنوان پرسشِ $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ به البرز می‌دهیم.

به عنوان مثال، شکل زیر درختی ۷ رأسی را نشان می‌دهد که از رأسِ ۱ آویزان شده است. با این شرایط، رأس‌های ۲ و ۳ (که با دو دایره مشخص شده‌اند)، رأس‌هایی دوشاخه هستند. رأسِ ۳ یک رأسِ دوشاخه‌ی ساده است، چرا که به‌جز خودش، هیچ یک از رأس‌هایی که جدّشان است (رأس‌های ۵، ۶ و ۷)، دوشاخه نیستند؛ ولی رأسِ ۲ یک رأسِ دوشاخه‌ی ساده نیست، چون جدّ رأسِ دوشاخه‌ی ۳ است. بنا بر این، خروجیِ الگوریتمِ بیتا در این مثال، یکی از دنباله‌های $\langle ۱,۵ \rangle$ یا $\langle ۱,۶ \rangle$ خواهد بود و در نتیجه، دنباله‌ی خروجیِ الگوریتمِ بیتا در این مثال دقیقا ۲ رأس خواهد داشت.



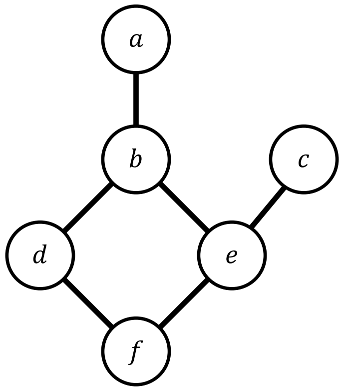
الف) ثابت کنید دنباله‌ی خروجیِ الگوریتمِ بیتا، حداکثر ۳۵۱ رأس دارد. (۱۶ امتیاز)

ب) ثابت کنید که به‌ازای هر درختِ T (درختی ۱۴۰۳ رأسی که درجه‌ی رأس‌های آن، حداکثر ۳ باشد)، اگر بیتا الگوریتمِ خود را روی درختِ T اجرا کند و خروجیِ آن را به عنوان پرسش، به البرز دهد، همواره می‌تواند رأسِ u را بر اساس پاسخِ البرز پیدا کند. (۱۶ امتیاز)

ج) یک درختِ T (درختی ۱۴۰۳ رأسی که درجه‌ی رأس‌های آن، حداکثر ۳ باشد) مثال بزنید که برای آن، هیچ پرسشی با اندازه‌ی حداکثر ۳۵۰ رأس وجود نداشته باشد که همواره با جوابِ آن پرسش، بتوان رأسِ u را با قطعیت پیدا کرد. (۱۶ امتیاز)

سوال ۴.. ۴۰ امتیاز

در یک گرافِ ساده، **سختیِ** یک مجموعه‌ی S از رأس‌ها را تعدادِ یال‌هایی از این گراف تعریف می‌کنیم که حداقل یکی از دو سرشان، عضوِ S باشد. به عنوان مثال در گراف زیر، **سختیِ** مجموعه‌ی $S = \{a, b, c\}$ برابرِ ۴ است.



یک گرافِ ساده را در نظر بگیرید که ۱۰۰۰ یال دارد و درجه‌ی هر رأسِ آن حداکثر ۴ است. در این گراف، ۳۰۰ رأس به رنگِ قرمز، و بقیه‌ی رأس‌ها به رنگِ آبی هستند. به یک مجموعه از رأس‌ها، قرمز می‌گوییم اگر همه‌ی اعضای آن مجموعه به رنگِ قرمز باشند. ثابت کنید یک مجموعه‌ی قرمزِ ۳۰ رأسی با سختیِ حداکثر ۱۰۰ وجود دارد.

(اگر به‌جای اثباتِ حکم سوال، فقط نشان دهید یک مجموعه‌ی قرمزِ ۳۰ رأسی با سختیِ حداکثر ۱۰۵ وجود دارد، ۲۶ امتیاز دریافت می‌کنید؛ هم‌چنین اگر نشان دهید یک مجموعه‌ی قرمزِ ۳۰ رأسی با سختیِ حداکثر ۱۱۰ وجود دارد، ۱۳ امتیاز دریافت می‌کنید.)