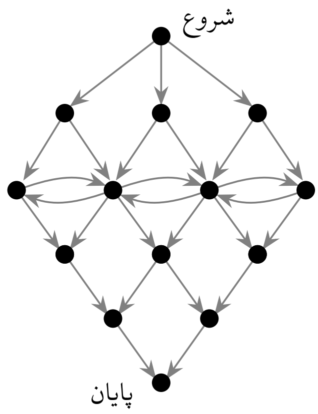
- زمان آزمون ۲۱۰ دقیقه است.
- آزمون ۲۰ سوال دارد.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.
- سوالات ۱۷ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

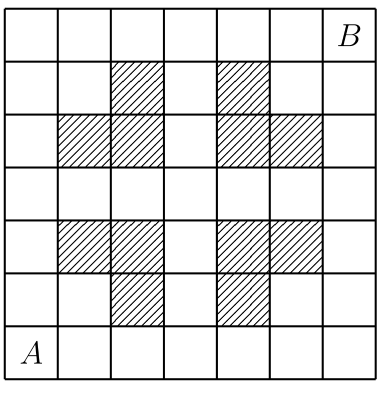
---

۱ مریم می‌خواهد از بالاترین رأسِ گراف جهت‌دار زیر به پایین‌ترین رأس آن برود. او تنها می‌تواند در جهتِ مشخص‌شده روی یال‌ها حرکت کند و نمی‌تواند از هیچ رأسی بیش از یک بار عبور نماید. مریم به چند روش می‌تواند این مسیر را بپیماید؟



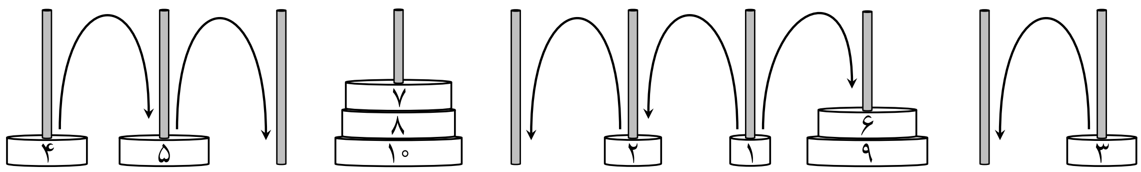
۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۱۴ ۴) ۷۲ ۵) ۹۶

۲ بردیا می‌خواهد در جدول زیر از خانه‌ی A به خانه‌ی B برود. در خانه‌هایی از این جدول که با هاشور مشخص شده‌اند، مانع وجود دارد. او در هر مرحله می‌تواند به یکی از خانه‌های مجاورِ ضلعیِ خانه‌ی فعلی‌اش برود، ولی نمی‌تواند وارد خانه‌ای شود که قبلا در آن حضور داشته یا در آن مانع هست. بردیا به چند روش می‌تواند این مسیر را طی کند؟



۱) ۱۰۴ ۲) ۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۹۶ ۵) ۸۰

۳ ۱۰ میله مانند شکل زیر، در یک ردیف روی زمین نصب شده‌اند. ملیکا ۱۰ دیسک با وزن‌های ۱ تا ۱۰ کیلوگرم (از هر وزن، دقیقا یک دیسک) دارد و در ابتدا، دقیقا یک دیسک را در هر میله گذاشته است. او در هر مرحله می‌تواند یک میله را که دقیقا یک دیسک دارد، انتخاب و دیسک آن را خارج کند و از بالا داخل یکی از میله‌های مجاورش بیندازد، به شرطی که دیسکِ جابه‌جاشده از بالاترین دیسکِ میله‌ی مقصد سبک‌تر باشد یا این‌که میله‌ی مقصد هیچ دیسکی نداشته باشد. برای مثال، وضعیت دیسک‌ها می‌تواند پس از تعدادی مرحله، مانند شکل زیر باشد و در مرحله‌ی بعد، ملیکا می‌تواند در جهت یکی از پیکان‌های کشیده‌شده دیسکی را جابه‌جا کند. از میان همه‌ی حالات ممکن برای چینش اولیه‌ی دیسک‌ها در میله‌ها، ملیکا برای چند حالت می‌تواند همه‌ی دیسک‌ها را با تعدادی حرکت، به یک میله منتقل کند؟ فرض کنید هر یک از میله‌ها به‌قدری بلند است که بتوان همه‌ی ۱۰ دیسک را با هم در آن میله جای داد و فاصله بین میله‌ها نیز به حدی هست که دیسک‌های دو میله‌ی مجاور به‌هم گیر نکنند.



۱) ۵۱۲ ۲) ۳۶۲۸۸۰ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۳۶۲۸۸۰۰ ۵) ۲۰۴۸

۴ آرمیتا و باران مشغول یک بازی روی تخته‌سیاه هستند. در ابتدا، باران یک عدد طبیعیِ دل‌خواه را انتخاب می‌کند و آن را روی تخته‌سیاه می‌نویسد. سپس آرمیتا بازی را شروع می‌کند و بعد از هر یک، نوبت به شخصِ دیگر می‌رسد. آرمیتا در هر نوبتش می‌تواند به‌مقدارِ a یا $۲a$ از عددِ روی تخته کم کند و عدد حاصل را به‌جایِ آن برروی تخته بنویسد. باران هم در هر حرکت می‌تواند به مقدارِ b یا $۲b$ از عدد روی تخته کم کند و عدد حاصل را جایگزینِ عدد روی تخته کند. نهایتا، کسی که عددی کمتر از صفر روی تخته بنویسد، بَرنده‌ی بازی است. اگر هر دو نفر بهینه عمل کنند، به‌ازای چند مورد از حالت‌های زیر برای مقدارِ a و b، آرمیتا می‌تواند همواره طوری بازی کند که برنده‌ی بازی باشد؟ لازم به ذکر است که بهینه عمل کردنِ باران، شامل انتخابِ او در تعیینِ عدد اولیه‌ی نوشته‌شده روی تخته‌سیاه نیز می‌شود.

$$(a = ۱۰, b = ۴)،(a = ۲۰, b = ۳۵)،(a = ۳۰, b = ۱۵)،(a = ۴۰, b = ۴۰)$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۰ ۵) ۱

۵ دو مجموعه‌ی مجزای $S = \{A, B, C, D\}$ و $T = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ را در نظر بگیرید. به یک زیرمجموعه از $S \cup T$ **زیبا** می‌گوییم اگر ۴ عضوی باشد و با هر کدام از دو مجموعه‌ی S و T، دقیقا دو عضو مشترک داشته باشد. مثلا مجموعه‌ی $\{A, D, ۲, ۳\}$ زیبا است، اما مجموعه‌ی $\{A, B, D, ۴\}$ زیبا نیست. می‌خواهیم به هر مجموعه‌ی زیبا، یک رنگ منتسب کنیم با این شرط که به هر دو مجموعه‌ی متمایزِ زیبا که حداقل دو عضو مشترک دارند، رنگ‌های متفاوتی منتسب شده باشد. به حداقل چند رنگ مختلف برای انجام این کار نیاز داریم؟

۱) ۱۵ ۲) ۶ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶ ۵) ۹

۶ پارمیس و نازلی هر کدام در خانه‌ای از یک جدول ۹ × ۹ قرار دارند. پارمیس در پایین‌ترین و چپ‌ترین خانه، و نازلی در بالاترین و راست‌ترین خانه از جدول قرار دارد. هر روز صبح، پارمیس یک سکه می‌اندازد که با احتمالِ برابر، شیر یا خط می‌آید. اگر سکه شیر آمد، پارمیس از جایی که قرار دارد، یک خانه به‌سمت بالا می‌رود و نازلی نیز از جایی که قرار دارد، یک خانه به‌سمت پایین حرکت می‌کند. اگر سکه خط آمد، پارمیس یک خانه به‌سمت راست، و نازلی یک خانه به‌سمت چپ می‌رود. سپس، هر دوی آن‌ها در خانه‌ای از جدول که در آن قرار دارند، شب را صبح می‌کنند. این روند تا زمانی ادامه می‌یابد که پارمیس یا نازلی از جدول خارج شوند. احتمال این که نازلی و پارمیس شبی را با هم، در خانه‌ی یکسانی از جدول سپری کنند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳۵}{۱۲۸}$ ۲) $\frac{۶۳}{۲۵۶}$ ۳) $\frac{۴۹۰}{۱۲۸۷}$ ۴) ۰ ۵) $\frac{۶۴۳۵}{۳۲۷۶۸}$

۷ روی یک برکه مانند شکل زیر، ۱۰ برگ در یک ردیف، از چپ به راست، در جایگاه‌های ۱ تا ۱۰ قرار دارند. در سمت چپِ این برکه، ۱۰ قورباغه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ حضور دارند و می‌خواهند با عبور از روی برگ‌ها، به سمت راستِ برکه بروند که می‌توان آن را جایگاه یازدهم در نظر گرفت. در هر لحظه، حداکثر یک قورباغه می‌تواند روی هر برگ بنشیند، و بعد از جهیدنِ یک قورباغه از روی برگی که بر آن نشسته، آن برگ به زیر آب می‌رود و دیگر قابل استفاده نیست. هر قورباغه قدرت جهش مخصوص به خود را دارد؛ قورباغه‌ی شماره‌ی i (برای $۱ \leqslant i \leqslant ۱۰$) می‌تواند در هر حرکت، حداکثر i جایگاه به سمت راست بجهد. مثلا قورباغه‌ی شماره‌ی ۲، مطابق شکل زیر، می‌تواند در یک حرکت از ابتدای برکه به روی یکی از برگ‌های اول یا دوم بجهد. با توجه به شرایط گفته‌شده، حداکثر چند قورباغه می‌توانند با جهیدن روی برگ‌ها، از برکه رد شوند؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۸ ۵) ۷

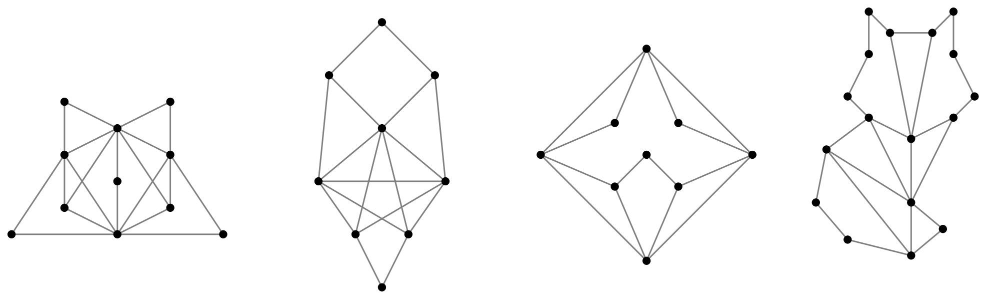
۸ سهیل دنباله‌ی ۴۲ عضویِ سیبوناچی را به صورت زیر تعریف کرده است:

- ۵ عضو اول دنباله عبارت‌اند از: $s_۱ = ۳۷, s_۲ = ۴۲, s_۳ = ۸۴, s_۴ = ۲۴, s_۵ = ۴۱$
- به ازای $۵ < n \leqslant ۴۲$ داریم: $s_n = s_{n-۱} + s_{n-۲} + s_{n-۳} + s_{n-۴} + s_{n-۵}$

او یک بازه (تعدادی عضو متوالی) از دنباله را **عجیب** می‌داند، اگر حاصل‌جمع اعضای آن بازه عددی فرد باشد. مثلا بازه‌ی $\langle s_۳, s_۴, s_۵ \rangle$ عجیب است چون جمع اعضایش عددی فرد می‌شود، ولی $\langle s_۲, s_۳ \rangle$ عجیب نیست چون حاصل‌جمع اعضایش فرد نمی‌باشد. دنباله‌ی ۴۲ عضوی سیبوناچی، چند بازه‌ی عجیب دارد؟

۱) ۴۴۸ ۲) ۳۹۲ ۳) ۴۶۲ ۴) ۴۲۰ ۵) ۴۰۰

۹ زهرا برای رسم یک گراف، در ابتدا تنها یک رأس می‌گذارد و بعد از آن در هر مرحله، یک رأس جدید به گرافِ فعلی اضافه می‌کند و از رأسِ اضافه‌شده، حداکثر دو یال به رأس‌های دیگر می‌کشد. زهرا از میان چهار گرافِ همبند زیر، چند مورد را می‌تواند به‌روش خود رسم کند؟

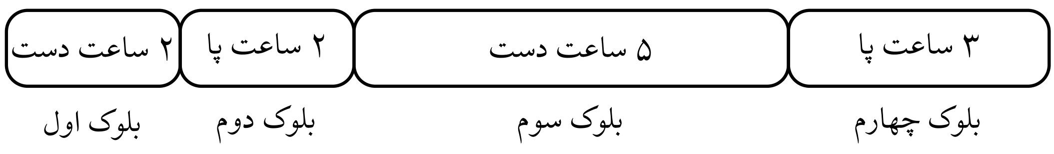


۱) ۴ ۲) ۰ ۳) ۳ ۴) ۱ ۵) ۲

۱۰ استاد شیفو می‌خواهد یک برنامه‌ی تمرینیِ ۱۲ ساعته برای تقویت عضلات دست و پا طراحی کند. این برنامه به‌صورت دنباله‌ای از بلوک‌های تمرینی است. هر بلوک تمرینی، یا مربوط به ورزش دست است یا ورزش پا، و مدت زمان آن نیز بر حسب ساعت، عددی طبیعی است. مثلا یک بلوک تمرینی می‌تواند از ۳ ساعت تمرین پا تشکیل شده باشد. استاد شیفو به این نتیجه رسیده است که یک برنامه‌ی تمرینی مناسب، دارای شرایط زیر است:

- بلوک‌های تمرینی باید به‌شکل یکی‌درمیان، مربوط به ورزش دست و ورزش پا باشند.
- اولین بلوک تمرینی باید مربوط به ورزش دست باشد.
- آخرین بلوک تمرینی باید مربوط به ورزش پا باشد.
- یک بلوک تمرینیِ ورزشِ پا، نباید از بلوک تمرینیِ قبل از آن، مدت زمان بیشتری داشته باشد.

شکل زیر نمونه‌ای از یک برنامه‌ی تمرینی با شرایط مذکور را نشان می‌دهد. چند برنامه‌ی تمرینیِ ۱۲ ساعته وجود دارد که از نظر استاد شیفو مناسب باشد؟ دو برنامه‌ی تمرینی، متمایز محسوب می‌شوند اگر زمانی (در طولِ ۱۲ ساعت) وجود داشته باشد که در یک برنامه، برای آن زمان، ورزشِ دست تعیین شده باشد، و در برنامه‌ی دیگر، برای آن زمان، ورزشِ پا تعیین شده باشد.

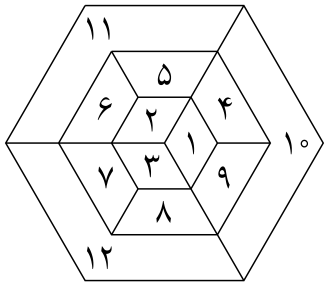


۱) ۲۸۴ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۸۶ ۴) ۱۲۳ ۵) ۱۵۵

۱۱ یک عدد صحیح نامنفی را **زیبا** می‌نامیم اگر هم مضربِ ۳ باشد و هم در نمایش دودوییِ آن، دو رقمِ یکِ متوالی وجود نداشته باشد. مثلا عددِ ۹ زیبا است چون هم مضربی از ۳ است و هم در نمایش دودویی آن (۱۰۰۱)، هیچ دو رقمِ یکی مجاور نیستند. چند عدد زیبا در بازه‌ی [۰, ۱۰۲۳] (شامل خودِ ۰ و ۱۰۲۳) وجود دارد؟

۱) ۴۶ ۲) ۴۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۸ ۵) ۵۴

۱۲ سارا می‌خواهد هر یک از ۱۲ ناحیه‌ی شکل زیر را با یکی از سه رنگِ آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کند، با این شرط که هر دو ناحیه‌ای که با هم ضلع مشترک دارند، رنگ‌های متفاوتی داشته باشند. او به چند روش می‌تواند این رنگ‌آمیزی را انجام دهد؟ دو روش رنگ‌آمیزی متفاوت محسوب می‌شوند اگر ناحیه‌ای وجود داشته باشد که در این دو روش، رنگ متفاوتی داشته باشد.



۱) ۲۴ ۲) ۳۰ ۳) ۸ ۴) ۳۶ ۵) ۵

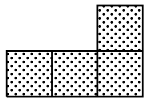
۱۳ سروش و بهرام روی یک جدول ۴ × ۴ بازی می‌کنند. در ابتدا، بهرام ۴ خانه‌ی متمایز را از جدول انتخاب می‌کند و هر یک از اعدادِ ۱ تا ۴ را در یکی از آن خانه‌ها پنهان می‌کند. سروش که از انتخابِ بهرام خبر ندارد، می‌خواهد با تعدادی پرسش، مکان هر ۴ خانه‌ی انتخابیِ بهرام را به‌همراه عددشان پیدا کند. سروش در هر پرسش می‌تواند یک زیرجدول را مشخص کند تا بهرام در پاسخ بگوید چه اعدادی در این زیرجدول وجود دارند (بدون اشاره به جایی که هر عدد پنهان شده است). یک زیر جدول، جدولی ناتهی است که از اشتراکِ تعدادی سطرِ متوالی و تعدادی ستونِ متوالی از جدولِ اصلی حاصل می‌شود. سروش حداقل به چند پرسش نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۴ ۵) ۳

۱۴ برای دنباله‌ی دودوییِ $A = \langle a_۱, a_۲, \dots, a_n \rangle$، عدد طبیعیِ $i \in \{۱, ۲, \dots, n - ۱\}$، **مشکل‌ساز** نامیده می‌شود اگر دنباله‌ی متشکل از i عنصرِ اولِ A با دنباله‌ی متشکل از i عنصرِ آخرِ A برابر باشد. به بیان دقیق‌تر، عددِ i زمانی برای دنباله مشکل‌ساز است که $\langle a_۱, \dots, a_i \rangle = \langle a_{n-i+۱}, \dots, a_n \rangle$. یک دنباله‌ی دودویی را **بی‌اشکال** می‌نامیم اگر هیچ عددی برای آن مشکل‌ساز نباشد. چند دنباله‌ی دودوییِ بی‌اشکالِ متمایز به‌ازای $n = ۱۲$ وجود دارد؟

۱) ۵۶۸ ۲) ۲۰۴۸ ۳) ۶۴ ۴) ۱۱۱۶ ۵) ۲۹۸۰

۱۵ امیرمحمد یک جدول ۵ × ۵ دارد. او می‌خواهد یکی از ۲۵ خانه‌ی این جدول را حذف کند، و باقی خانه‌های جدول را با ۶ قطعه به‌شکل زیر بپوشاند، با این شرط که هر یک از ۲۴ خانه‌ی باقی‌مانده از جدول، توسط دقیقا یک قطعه پوشانده شده باشد. او می‌تواند قبل از قرار دادنِ یک قطعه در جدول، آن را به‌میزان دل‌خواه، دوَران یا تقارن دهد. چند خانه از این جدول هستند که امیرمحمد می‌تواند با حذف آن خانه، باقی خانه‌های جدول را با شرایطِ گفته‌شده بپوشاند؟



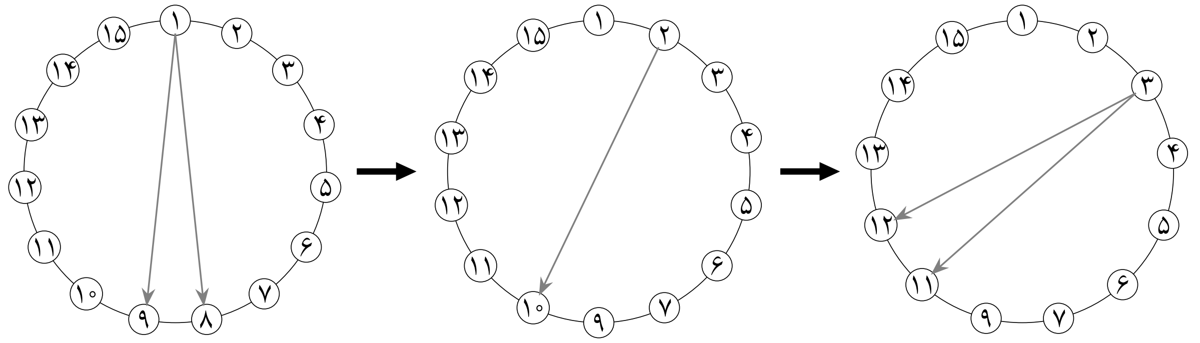
۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۹ ۵) ۴

۱۶ ۱۵ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۵، مانند دایره‌ی سمت چپ شکل زیر، با فاصله‌های یک‌نواخت، به‌ترتیبِ ساعت‌گرد دورِ یک دایره ایستاده‌اند تا مراسم ویژه‌ای را اجرا کنند. این مراسم از تعدادی مرحله تشکیل شده است و در هر مرحله‌ی آن، کسی که نوبتش است (با شروع از فردِ شماره‌ی ۱ در نخستین مرحله)، به‌صورت زیر عمل می‌کند:

- اگر تعداد افراد دور دایره زوج باشد، فردی را که در آن مرحله، در جایگاه روبه‌روی قطریِ او در دایره ایستاده است، نشانه گرفته و به او شلیک می‌کند.
- اگر تعداد افراد دور دایره فرد باشد، از دو نفری که در آن مرحله، در جایگاه‌های روبه‌روی قطری‌اش در دایره قرار دارند، یک نفر را به تصادف (با احتمال یکسان) نشانه گرفته و به او شلیک می‌کند.

پس از این حرکت، کسی که به او شلیک شده، از دور خارج می‌شود و در ادامه، افراد باقی‌مانده جایگاه‌های خود را مجددا طوری در دایره تنظیم می‌کنند که با فاصله‌های یک‌نواخت دور آن قرار گرفته باشند. سپس برای مرحله‌ی بعدی، نوبت به کسی می‌رسد که در آن لحظه، بعد از فردِ شلیک‌کننده در دایره (در جهت ساعت‌گرد) قرار دارد. این مراسم تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که تنها یک نفر دور دایره باقی مانده باشد. چه افرادی این شانس را دارند که آخرین فردِ باقی‌مانده در پایان مراسم باشند؟

در شکل زیر، مثالی از مراحل ابتداییِ اجرای این مراسم نشان داده شده است. در مرحله‌ی اولِ این مثال، فرد شماره‌ی ۱ از میان افراد با شماره‌های ۸ و ۹ که در جایگاه‌های روبه‌روی قطری او هستند، به تصادف، فرد شماره‌ی ۸ را انتخاب، و به او شلیک می‌کند تا از دور خارج شود. در مرحله‌ی بعد، نوبت به شلیک فرد شماره‌ی ۲ می‌رسد، که با توجه به زوج بودنِ تعداد افراد حاضر، به فرد شماره‌ی ۱۰ شلیک می‌کند. سپس، نوبت به فرد شماره‌ی ۳ می‌رسد که باید به یکی از افراد با شماره‌های ۱۱ یا ۱۲ شلیک کند.



۱) $\{8, 9, 10, 11, 12\}$ ۲) $\{3, 5, 6\}$ ۳) $\{2, 3, 5, 6\}$ ۴) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ ۵) $\{8, 9, 11, 12\}$

یک جدولِ ۶×۶ را در نظر بگیرید که در هر خانه‌ی آن، یک دانش‌آموزِ کلاسِ اول، دوم یا سوم ایستاده است. به مجموعه‌ی دانش‌آموزانِ هم‌سطر یا هم‌ستونِ یک دانش‌آموز (به‌غیر از خودش)، **سیطره‌ی دیدِ** آن دانش‌آموز گفته می‌شود. پس سیطره‌ی دید هر دانش‌آموز، مجموعه‌ای ۱۰ عضوی است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ اگر در سیطره‌ی دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس اولی، حداقل یک دانش‌آموزِ کلاس دومی، و در سیطره‌ی دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس دومی، حداقل یک دانش‌آموزِ کلاس سومی باشد، حداکثر چند دانش‌آموزِ کلاس اولی می‌تواند در جدول وجود داشته باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۵ ۳) ۳۰ ۴) ۱۸ ۵) ۲۹

۱۸ اگر در سیطره‌ی دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس اولی، تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس دومی حداقل به‌اندازه‌ی تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس اولی (در سیطره‌ی دیدِ او) باشد، و در سیطره‌ی دیدِ هر دانش‌آموزِ کلاس دومی، تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس سومی حداقل به‌اندازه‌ی تعدادِ دانش‌آموزانِ کلاس دومی باشد، حداکثر چند دانش‌آموزِ کلاس اولی می‌تواند در جدول وجود داشته باشد؟

۱) ۱۹ ۲) ۱۵ ۳) ۱۲ ۴) ۲۱ ۵) ۱۸

مارال جایگشتِ n تاییِ تماما صعودیِ $\langle ۱, ۲, ۳, \ldots, n-۱, n\rangle$ را دارد و می‌خواهد آن را با تعدادی حرکت، به جایگشتِ تماما نزولیِ $\langle n, n-۱, \ldots, ۳, ۲, ۱\rangle$ تبدیل کند. او در هر حرکت، می‌تواند مانند شکل زیر، سه جایگاهِ (i, j, k) با شرطِ $۱ \leqslant i < j < k \leqslant n$ را در جایگشت خود انتخاب کند و اعدادِ این سه جایگاه را در آن، **دَوَران** دهد؛ یعنی عدد جایگاهِ j اُم را به جایگاهِ i اُم ببرد، عدد جایگاهِ k اُم را به جایگاهِ j اُم ببرد، و عدد جایگاهِ i اُم را به جایگاهِ k اُم ببرد. مثلا با فرضِ داشتنِ جایگشتِ $\langle ۳, ۶, ۵, ۴, ۱, ۲\rangle$، اگر او سه جایگاهِ $(۲, ۳, ۶)$ را برای حرکتِ دَوَران انتخاب کند، بعد از انجام این حرکت، به جایگشتِ $\langle ۳, ۵, ۲, ۴, ۱, ۶\rangle$ می‌رسد.

$$\langle p_۱,\ p_۲,\ p_۳,\ \cdots\ p_i\ \cdots\ p_j\ \cdots\ p_k\ \cdots\ p_n\rangle$$

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ به‌ازای چند عدد صحیحِ n در محدوده‌ی ۲۰۰۰ تا ۲۰۲۵ (شامل هر دوی این اعداد)، مارال می‌تواند با انجام تعدادی حرکت دَوَران، جایگشتِ n تاییِ تماما صعودیِ خود را به جایگشتی تماما نزولی تبدیل کند؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۷ ۳) ۰ ۴) ۲۶ ۵) ۱۴

۲۰ به‌ازای $n = ۳۳۳۳$، مارال حداقل چند حرکت دَوَران نیاز دارد تا بتواند جایگشتِ n تاییِ تماما صعودیِ خود را به جایگشتی تماما نزولی تبدیل کند؟

۱) ۲۴۹۹ ۲) ۱۱۱۳ ۳) ۱۶۶۶ ۴) ۲۲۲۲ ۵) ۱۱۱۱