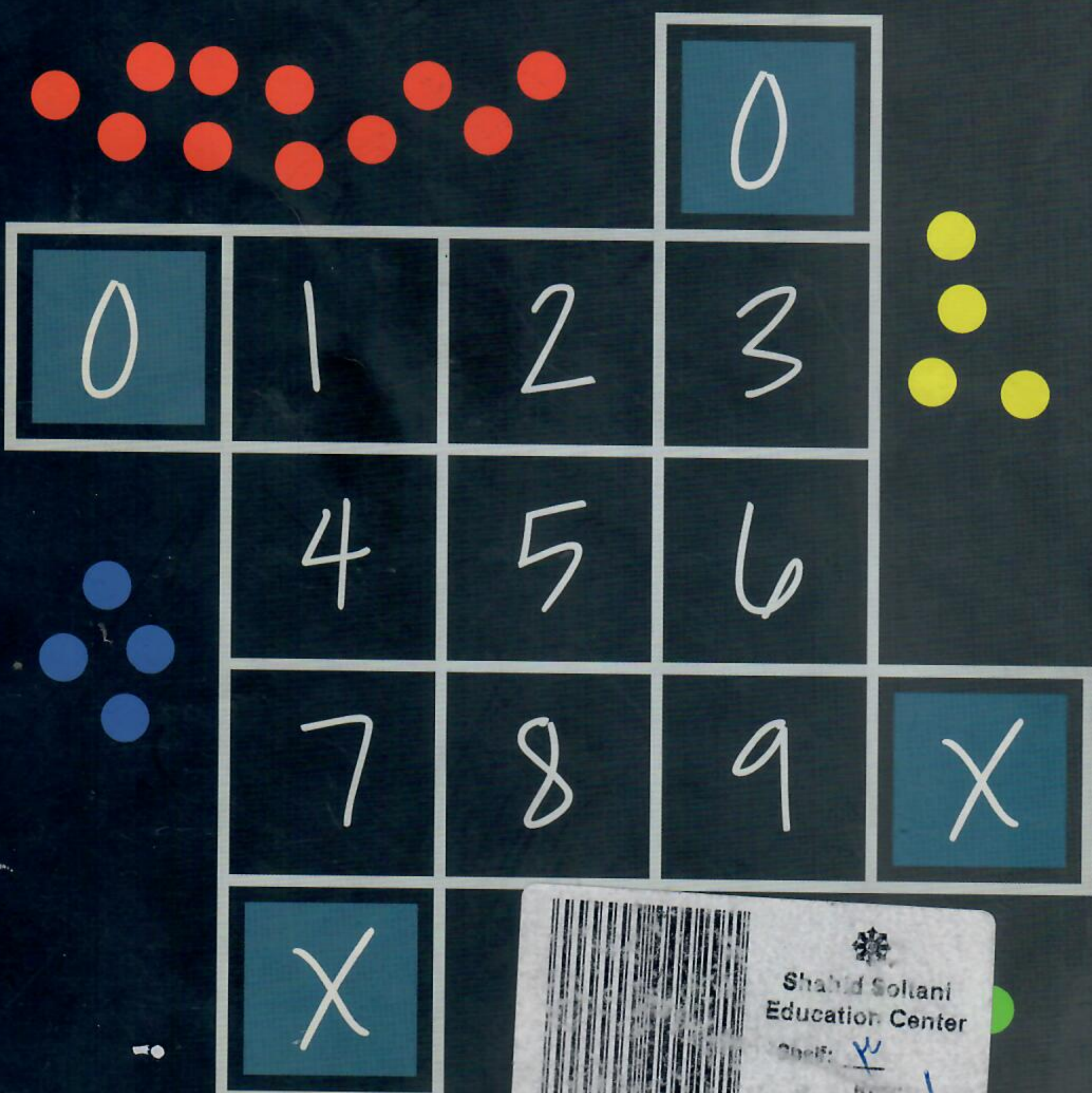
پاسخی بر المپیادهای کامپیوتر ایران

مرحله‌های دوم، از آغاز تا کنون

یاسر احمدی فولادی



اسکن شده به علت چاپ نشدن مجدد کتاب و عدم دسترسی شهرستان ها و مناطق محروم لطفاً اگر توان خرید این کتاب را دارید به علت حقوق ناشر حتما بخرید.

و اگر نمیتوانید حداقل دعایی خیری در حقشون کنید که واقعاً استاد زحمت کشی هستند. با تشکر از استاد عزیزم، جناب آقای یاسر احمدی فولادی که این کتاب فوق العاده را نگاشته اند.

پاسخی بر
المپیادهای کامپیوتر ایران

با سپاس فراوان از آقایان

دکتر بهمن مهری، و

دکتر حسن نجومی،

که بی یاری‌ی ایشان این کار به انجام نمی‌رسید

پیش‌گفتار

به نام‌ش

این کتاب به پاسخ‌گویی‌ی آزمون‌های مرحله‌های دوم المپیادهای کامپیوتر ایران از یکمین دوره پرداخته، و نخستین و تنها مرجع کامل پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها است. به‌جا بود پیش‌تر از این‌ها به چاپ چنین کتابی همت گمارده شود. چه‌را که نبود چنین کتابی سبب ناکام ماندن جست و جوی دانش‌آموزان برای یافتن پاسخ‌هایی معتبر، و نیز چاپ و پخش پاسخ‌هایی با اشتباه‌ها و کاستی‌های فراوان گشت. کتاب به گونه‌یی سازمان یافته است که برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به المپیاد، آموزگاران، در پی به‌کارگیری‌ی پرسش‌های المپیادها، و دوست‌داران سرگرمی‌های ریاضی، با هر اندازه آشنایی‌ی پیشین، سودمند باشد.

سه فهرست در کتاب به کار گرفته شده اند. نخستین فهرست، فهرست پرسشی است. در این فهرست با به‌کارگیری‌ی شماره‌ی یک‌تای مساله‌ها، گونه و سختی‌ی آن‌ها آمده است. پس برای نمونه می‌توان در صورت ناتوانی در پاسخ‌گویی‌ی یک مساله، پیش از بررسی‌ی پاسخ از اندازه‌ی سختی و گونه‌ی آن آگاه شد. این می‌تواند کمکی در رسیدن به راه حل باشد. در فهرست گونه‌یی برای هر گونه، یا تکنیک حل مساله، مساله‌هایی که از آن گونه هستند، یا آن تکنیک در راه حل آن‌ها به کار گرفته شده است، آورده شده اند. پس به سادگی می‌توان مساله‌هایی را از هر دسته‌ی دل‌خواه برگزید. فهرست سختی مساله‌ها را به سه دسته افراز می‌کند. دسته‌ی نخست، آسان‌ترین مساله‌ها را در بر دارد. برای حل این دسته مساله‌ها نیازی به داشتن پیش‌زمینه‌یی چندان فراتر از پرسش‌های مرحله‌ی یکم المپیاد نیست. در دسته‌ی دوم، مساله‌هایی هستند که برای حل آن‌ها باید از چه‌گونگی‌ی مساله‌های مرحله‌ی دوم المپیاد آگاهی داشت. این مساله‌ها را جدای از کاربرد معمول خود می‌توان برای تمرین در زمینه‌ی تکنیک به کار رفته، و یا سنجش توانایی‌ی حل مساله‌های مرحله‌ی دوم به کار برد. سخت‌ترین مساله‌ها در دسته‌ی آمده‌اند. حل این مساله‌های پیکارجو نیازمند مهارت بالا در حل مساله‌های مرحله‌ی دوم است.

در پاسخ‌گویی به مساله‌ها تنها یک شیوه ارایه شده است. پس کوشش شد به‌ترین راه حل ارایه شود. باید توجه داشت که هر مساله می‌تواند پاسخی با به‌کارگیری‌ی شیوه‌یی گوناگون از شیوه‌ی ارایه شده داشته باشد.

اشکال‌هایی در مساله‌ها بوده است. مساله‌ها هم‌آن گونه که بوده اند، آورده شده اند و اشکال‌های مهم‌تر با • در حل مشخص شده و تصحیح‌هایی بر آن‌ها انجام گرفته اند. به این سان بیش از ۱۰ مورد تصحیح رخ داد.

به مادربزرگ،

او که یادش همیشه در دلم است

فهرست‌نویسی‌ی پیش از انتشار کتاب‌خانه‌ی ملی‌ی ایران

احمدی فولادی، یاسر، ۱۳۵۸-
پاسخی بر المپیادهای کامپیوتر ایران : مرحله‌های دوم، از آغاز تا کنون / یاسر احمدی فولادی؛ ویراستاری: هدا جهان‌شاه‌لو. - تهران : پرنگ، ۱۳۸۳.
xiv، ۱۹۲ ص. : مصور، جدول، نمودار.
شابک ۲-۵-۹۴۶۸۵-۹۶۴
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
نمایه.
۱. المپیادها (کامپیوتر). ۲. کامپیوتر--مساله‌ها، تمرین‌ها، و غیره. ۳. کامپیوتر--مسابقه‌ها.
الف. جهان‌شاه‌لو، هدا، ۱۳۶۰- ، ویراستار. ب. عنوان.
۲پ۱۳/۲۴/LB۳۰۶۰ ۳۷۳/۲۳۸
کتابخانه‌ی ملی‌ی ایران م۸۲-۳۶۶۴۷

ویراستاری: هدا جهان‌شاه‌لو
طراحی‌ی جلد: یاسر احمدی فولادی
حروف‌چینی: سوده احمدی فولادی
نسخه‌خوانی: تیراژه زارع گاریزی
صفحه‌آرایی: هدا جهان‌شاه‌لو

شمار: ۵۰۰۰ تا
ارزش: ۲۲۰۰ تومان

چاپ یکم، اردی‌بهشت‌ماه ۱۳۸۳، انتشارات پرنگ

تهران، صندوق پستی‌ی ۷۳۱۹-۱۹۳۹۵
پست الکترونیکی‌ی rasta@ee.sharif.edu

پاسخی بر
المپیادهای کامپیوتر ایران

یاسر احمدی فولادی
عضو هیات تحریریه‌ی باش‌گاه دانش‌پژوهان جوان

با بیش از ۱۴۰ مساله

مرحله‌های دوم، از آغاز تا کنون

در بیان مساله‌ها حفظ امانت تا آن‌جا رخ داده است که سجاوندی جز در عبارت‌های ریاضی، و متن مساله‌ها جز در جای‌هایی که با † مشخص شده اند، هیچ تغییری را نپذیرفته است. در شیوه‌ی نوشتار واژگان به روشنی نمی‌شد به شیوه‌ی اصلی‌ی آزمون‌ها پای‌بند بود، چون در این صورت برای هر آزمون می‌بایست شیوه‌یی ویژه‌ی آن آزمون و گوناگون از دیگر آزمون‌ها و نیز از پاسخ هم‌آن آزمون به کار برد. هم‌چنین آرمان، بررسی‌ی آزمون‌ها و پاسخ‌دهی به آن‌ها بوده است، نه ارایه‌ی اصل شیوه‌ی نوشتار.

در نوشتار، یک شیوه در همه‌ی کتاب پی گرفته شد. برای نمونه در عبارت‌های ریاضی، ضرب میان دو عدد به جای گونه‌ی اصلی‌ی 'x' یا '×'، گونه‌ی '·' را به کار برد. متن نیز با تقریب خوبی هم‌گام با شیوه‌یی که احمد شاملو در نوشتار خود به کار بسته است، نبشته شد. پس واژه‌یی مانند 'باغبان' به‌گونه‌ی 'باغ‌بان' آمد. شیوه‌ی نوشتار، از نگرهای دکتر میر شمس‌الدین ادیب سلطانی اثرهای فراوان پذیرفت. پس 'اوست' به گونه‌ی 'او است' و 'مجاورند' به گونه‌ی 'مجاور اند' درآمد. هم‌چنین برای نمونه ایشان نوشتار 'شترنج' و 'سندلی' را درست می‌دانند. در هر دو نگرِ پی گرفته شده نیز نگارش چیزی مانند 'آغازیِ' باید به گونه‌ی 'آغازی‌یِ' باشد. هم‌چنین در نگر این دو تن ضمیرهای مفعولی، همگی، جدای از واژه‌ها نوشته می‌شوند: 'باختِ‌شان' به جای 'باختشان'. صادق هدایت بر این بود که اگر بخواهیم واژه‌های تنوین‌دار را به کار بریم، برای بخشیدن رنگ فارسی به آن‌ها و از میان رفتن گرفتاری‌های املایی، باید برای نمونه 'ابداً' را 'ابدن' و 'واقعاً' را 'واقعن' نوشت. این با اصل هم‌خوانی‌ی نوشتار و گفتار نیز هم‌سو است. هم‌چنین دکتر میر شمس‌الدین ادیب سلطانی این را روا می‌داند.

افزون بر یک‌سان شدن شیوه‌ی نوشتار، شماره‌گذاری‌ی بخش‌ها یک‌دست گشت. برای نمونه شماره‌گذاری‌ی زیرمساله‌ها از ترتیب فنیقی‌ی ا، ب، ج، ... به گونه‌ی کنونی‌ی پارسی‌ی ا، ب، پ، ... تغییر یافت. (به عکس نگر بسیاری، در نگر دکتر میر شمس‌الدین ادیب سلطانی 'ث' را در زبان پارسی داشته ایم: 'کیومرث'.) جز شیوه‌ی نگارش به کار رفته در متن، آن گونه که دکتر میر شمس‌الدین ادیب سلطانی روا می‌داند، و نیز دکتر غلام حسین مصاحب در کتاب‌های خود به کار بسته است، عددها در عبارت‌های ریاضی به گونه‌ی لاتین آورده شده اند: '$x + 1$'. هم‌چنین شماره‌گذاری‌ی صفحه‌های آغازین با عددهای رمی‌ی i، ii، iii، ... انجام شد.

به امید پیش‌رفت و شکفتگی‌ی هر چه بیش‌تر ایران‌زمین. شاید گامی باشد در این راه.

تهران، آبان‌ماه ۱۳۸۲ی هجری‌ی خورشیدی —ی‌اف

نمادها

در این جا لیستی از نمادهایی آورده شده است که شاید برای برخی از خوانندگان که هم‌آن موضوع‌ها را در جایی دیگر خوانده اند، ناآشنا باشد.

نماد	نام
$\neg p$	نقیض
$p \oplus q$	یای انحصاری: $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
$\lg x$	لگاریتم دودویی: $\log_2 x$
$\lfloor x \rfloor$	کف: $\max\{n \mid n \leqslant x,\ n \in \mathbb{Z}\}$
$\lceil x \rceil$	سقف: $\min\{n \mid n \geqslant x,\ n \in \mathbb{Z}\}$
$x \bmod y$	مانده: $x - y\lceil x/y \rceil$
$n¡$	زیرسازگان: $n!/0! - n!/1! + \cdots + (-1)^n n!/n!$
$m \backslash n$	شمردن: $m > 0,\ n = km,\ k \in \mathbb{Z}$
$(a_m \ldots a_0)_b$	نمایش پایه‌یی $\sum_{k=0}^{m} a_k b^k$
$\langle a_n \rangle$	دنباله: $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$
$\#A$	کاردینال: شمار عضوهای مجموعه‌ی A
$a \odot A$	$\odot$: $\{a \odot x \mid x \in A\}$
$A \setminus B$	بی: $\{x \mid x \in A \wedge x \notin A \cap B\}$

در این کتاب '...' را برای محدود کردن متن، آن گونه که نوشته می‌شود، و "..." را برای محدود کردن متن، آن گونه که خوانده می‌شود، به کار بردیم.

عبارتی به گونه‌ی 'a/bc' هم‌آن '$a/(bc)$' است. هم‌چنین $2n! = 2(n!)$.

فهرست گنجانیده‌ها

یکمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم صبح ۱۳۷۰/۱۱/۱۸، و نوبت دوم عصر ۱۳۷۰/۱۱/۱۹ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۲٫۵، و برای آزمون نوبت دوم ۲٫۵ ساعت بود.
- مسالهی ۱ دارای 10، مسالهی ۲ دارای 15، مسالهی ۳ دارای 25، مسالهی ۴ دارای 15، مسالهی ۵ دارای 15، و مسالهی ۶ دارای 20 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم یکمین المپیاد

۱ چندجمله‌یی‌های $P(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$، $(a_n \neq 0)$ و $Q(x) = b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$، $(b_m \neq 0)$ را در نظر بگیرید. الگوریتمی بنویسید که n و a_0 تا a_n و m و b_0 تا b_m را بگیرد و ضرایب چندجمله‌یی‌های $P(x) + Q(x)$ و $P(x) \cdot Q(x)$ را به دست آورد و به ترتیب در آرایه‌های S و P ذخیره کند. هم‌چنین درجات چندجمله‌یی‌های حاصل را به ترتیب در متغیرهای DS و DP ذخیره نماید.

۲ در یک دوره مسابقه، n تیم با شماره های 1 تا n شرکت دارند و به صورت دوره‌یی هر تیم با تمامی‌ی تیم‌ها مسابقه می‌دهد. هر مسابقه یک برنده و یک بازنده دارد. نتایج مسابقات در یک ماتریس $n \times n$ بدین ترتیب ثبت شده است که در درایه‌ی (i, j) شماره‌ی تیم برنده (i یا j) قرار دارد. عناصر روی قطر اصلی ماتریس صفر در نظر گرفته می‌شود.

یک دنباله‌ی $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ از شماره تیم‌ها را دنباله‌ی برنده می‌گوییم اگر به ازای $i = 1, \ldots, n-1$، تیم a_i از تیم a_{i+1} برده باشد. (دقت کنید که $a_i \in \{1,2,\ldots,n\}$ و اگر $i \neq j$ آن گاه $a_i \neq a_j$.)

الگوریتمی بنویسید که تعداد تیم‌ها ($n \leqslant 20$) و ماتریس نتایج را بگیرد و یک دنباله‌ی برنده پیدا کرده، در یک آرایه‌ی nتایی قرار دهد.

۳ یک ماتریس 12×12 متشکل از اعداد صفر و یک را در نظر بگیرید. هر سطر این ماتریس را می‌توان به عنوان یک عدد 12رقمی در مبنای 2 در نظر گرفت که با تبدیل آن به مبنای 10 یک عدد صحیح نامنفی به دست می‌آید. با تبدیل این عدد به مبنای 2 و در صورت لزوم افزایش ارقام از سمت چپ تا 12 رقم دوباره می‌توان به سطر ماتریس دست یافت.

در ماتریس فوق ارقام 1 شکلی را به وجود می‌آورند، (مانند شکل اول از چپ†). ماتریس فوق را 90 درجه دوران یافته می‌نامیم در صورتی که شکل داخل آن نسبت به مرکز ماتریس، 90 درجه در جهت مثبت مثلثاتی دوران داده شود، (مانند شکل دوم از چپ†). ماتریس فوق را فشرده شده می‌نامیم در صورتی که هر ماتریس 2×2ی داخل آن را با شرایط زیر به یک درایه تبدیل کنیم. در صورتی که تعداد درایه‌های مساوی‌ی 1 یک ماتریس 2×2ی داخلی بیش‌تر از یک باشد آن ماتریس را به یک درایه‌ی 1 و در غیر این

صورت به یک درایه‌ی صفر تبدیل می‌کنیم، (مانند شکل سوم از چپ[†]). (ماتریس‌های 2×2 را از گوشه‌ی سمت چپ و بالا در نظر می‌گیریم).

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

ا برنامه‌یی بنویسید که 12 عدد صحیح نامنفی‌ی کوچک‌تر از 4096 را از ورودی گرفته و با تبدیل آن‌ها به مبنای 2، به ترتیب سطرهای یک ماتریس 12×12 متشکل از صفر و یک را تولید کند.

ب برنامه‌یی بنویسید که ماتریس حاصل از مرحله‌ی ا را 90 درجه دوران دهد.

پ برنامه‌یی بنویسید که ماتریس حاصل از مرحله‌ی ا را فشرده کند.

پاسخ‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم یکمین المپیاد

۱ برنامه‌ی خواسته شده به زبان پاسکال در زیر آمده است.

```
program Problem1;
var
  M, N, DS, DP, I: Word;
  A, B, S: array [0..100] of Real;
  P: array [0..200] of Real;
begin
  ReadLn(N);
  for I := 0 to N do
    ReadLn(A[I]);
  ReadLn(M);
  for I := 0 to M do
    ReadLn(B[I]);
  for DS := 0 to N + Ord(M > N) * (M - N) do {WiD}
    S[DS] := A[DS] + B[DS];
  for DP := 0 to M + N do {WiD}
    for I := 0 to DP do
      P[DP] := P[DP] + A[I] * B[DP -I]
end.
```

۲ برنامه را در زیر داریم.

```
program Problem2;
var
  N, I, J, K: Byte;
  Tournament: array [1..100, 1..100] of Byte;
  HamiltonianPath: array [1..100] of Byte;
begin
  ReadLn(N);
  for I := 1 to N do
    for J := 1 to N do
      ReadLn(Tournament[I, J]);
```

```
  for I := 1 to N do
  begin
    HamiltonianPath[I] := I;
    for J := 1 to I - 1 do
      if Tournament[I, HamiltonianPath[J]] = I then
      begin
        for K := I - 1 downto J do
          HamiltonianPath[K + 1] := HamiltonianPath[K];
        HamiltonianPath[J] := I;
        Break
      end {if}
  end {for}
end.
```

۳

```
program Problem3a;
var
  I, J: Byte;
  C: array [1..12] of Word;
  M: array [1..12, 1..12] of 0..1;
begin
  for I := 1 to 12 do
    ReadLn(C[I]);
  for I := 1 to 12 do
    for J := 12 downto 1 do
    begin
      M[I, J] := C[I] and 1;
      C[I] := C[I] shr 1
    end
end.
```

ب

```
program Problem3a;
var
  I, J: Byte;
  C: array [1..12] of Word;
  M: array [1..12, 1..12] of 0..1;
begin
  for I := 1 to 12 do
    ReadLn(C[I]);
  for I := 1 to 12 do
    for J := 12 downto 1 do
```



```
    begin
      M[I, J] := C[I] and 1;
      C[I] := C[I] shr 1
    end
end.
```

پ

```
program Problem3a;
var
  I, J: Byte;
  M: array [1..12, 1..12] of 0..1;
  CM: array [1..6, 1..6] of 0..1;
begin
  for I := 1 to 6 do
    for J := 1 to 6 do
      CM[I, J] := Ord(M[I * 2 - 1, J * 2 - 1] +
                      M[I * 2 - 1, J * 2    ] +
                      M[I * 2    , J * 2 - 1] +
                      M[I * 2    , J * 2    ] > 1)
end.
```

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم یکمین المپیاد

۴ یک الگوریتم غیر بازگشتی، فقط با استفاده از عمل جمع، بنویسید که تعداد ترکیب‌های مختلف m شیء متمایز از میان n شیء متمایز، $\binom{n}{m}$، را با استفاده از فرمول زیر محاسبه کند.

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} 1 & n = m \text{ or } m = 0 \\ \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1} & n > m \end{cases}$$

۵ برنامه‌یی برای یک بازی بین کامپیوتر و کاربر (استفاده کننده از کامپیوتر) با شرایط زیر بنویسید:

ابتدا کاربر یک عدد طبیعیِ یک‌رقمی، n، به ماشین می‌دهد. سپس ماشین از کاربر می‌خواهد که یک عدد صحیح نامنفیِ کوچک‌تر از 2^n در نظر بگیرد و بعد با n سوال عدد مورد نظر کاربر را پیدا می‌کند. در هر سوال $2^{(n-1)}$ عدد روی صفحه‌ی نمایش ظاهر می‌شود و کاربر باید در صورت وجود عدد مورد نظرش در بین آن‌ها، پاسخ Y و در غیر این صورت پاسخ N را وارد کند.

مثال. اگر $n = 3$ و سه دسته عدد ظاهر شده روی صفحه‌ی نمایش و جواب‌های کاربر به صورت زیر باشد، آن‌گاه عدد مورد نظر کاربر مساویِ 5 است.

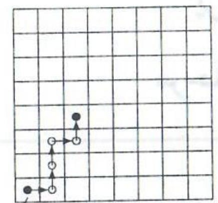
```
1 3 5 7   Y
2 3 6 7   N
4 5 6 7   Y
```

۶ یک صفحه‌ی شترنج 8×8 را در نظر بگیرید. یک مهره در خانه‌ی سمت چپ و پایین این صفحه قرار دارد. این خانه را خانه‌ی شروع می‌نامیم و با مختصات $(1,1)$ نمایش می‌دهیم. مهره‌ی فوق را، در هر بار حرکت، فقط می‌توان یا یک خانه به سمت راست و یا یک خانه به سمت بالا حرکت داد.

برنامه‌یی بنویسید که کلیه‌ی مسیرهای ممکن برای رسیدن این مهره از خانه‌ی شروع به خانه‌یی با مختصات

(i,j) را تولید کند. هر مسیر با دنباله‌یی از R و U مشخص می‌شود که در آن هر حرکت به سمت راست با R و هر حرکت به سمت بالا با U نشان داده می‌شود.

مثال. در شکل مقابل یک مسیر از خانه‌ی شروع به خانه‌ی $(3,4)$ رسم شده است که به صورت دنباله‌ی RUURU نشان داده می‌شود.



خانه‌ی شروع

پاسخ‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم یکمین المپیاد

۴ برنامه‌ی خواسته شده در زیر آمده است.

```
program Problem4;
var
  M, N, I, J: Byte;
  C: array [0..100, 0..100] of LongInt;
begin
  ReadLn(M, N);
  for I := 0 to N do
  begin
    C[0, I] := 1;
    C[I, I] := 1
  end; {for}
  for I := 1 to M do
    for J := I + 1 to N do
      C[I, J] := C[I, J - 1] + C[I - 1, J - 1];
  WriteLn(C[M, N])
end.
```

۵ برنامه را در زیر داریم.

```
program Problem5;
var
  N: Byte;
  C: Char;
  BIdx, EIdx, I: Word;
begin
  ReadLn(N);
  EIdx := 1 shl N - 1;
  while BIdx < EIdx do
  begin
    for I := (BIdx + EIdx + 1) shr 1 to EIdx do
```

```
      Write(I, ' ');
    ReadLn(C);
    if C = 'Y' then
      BIdx := (BIdx + EIdx + 1) shr 1
    else if C = 'N' then
      EIdx := (BIdx + EIdx + 1) shr 1 - 1
  end; {while}
  WriteLn(BIdx)
end.
```

۶ برنامه در زیر آمده است.

```
program Problem6;
var
  I, J, C, D: Byte;
  S: array [1..16] of Byte;
  T: string[16];
begin
  ReadLn(I, J);
  for C := 1 to I - 1 do
    S[C] := C;
  T[0] := Chr(I + J - 2);
  repeat
    FillChar(T[1], Length(T), 'U');
    for C := 1 to I - 1 do
      T[S[C]] := 'R';
    C := I - 1;
    WriteLn(T);
    while (C > 0) and (S[C] = J + C - 1) do
      Dec(C);
    if C > 0 then
    begin
      Inc(S[C]);
      for D := C + 1 to I - 1 do
        S[D] := S[D - 1] + 1
    end {if}
  until C = 0
end.
```

دومین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

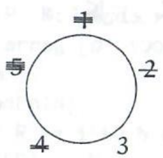
- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم صبح ۱۳۷۱/۱۱/۱۹، و نوبت دوم عصر ۱۳۷۱/۱۱/۱۹ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۳، و برای آزمون نوبت دوم ۳ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ دارای 15، مساله‌ی ۲ دارای 15، مساله‌ی ۳ دارای 20، مساله‌ی ۴ دارای 15، مساله‌ی ۵ دارای 15، و مساله‌ی ۶ دارای 20 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم دومین المپیاد

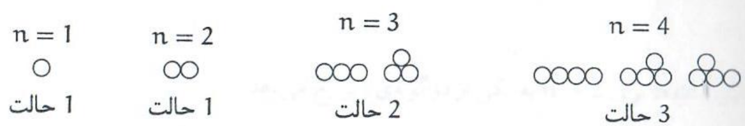
۱ اعداد 1، 2، ... و n را روی یک دایره در جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیریم. حال از عدد 1 شروع کرده اعداد را یکی در میان حذف می‌کنیم تا سرانجام یک عدد باقی بماند.

مثلا برای $n = 5$ به ترتیب اعداد 2، 4، 1 و 5 حذف شده و عدد 3 باقی می‌ماند.



برنامه‌یی بنویسید که عدد n را بگیرد و اعدادی را که حذف می‌شوند به ترتیب نشان دهد و عدد باقی مانده را مشخص کند.

۲ n سکه داریم. این سکه‌ها را در یک ردیف یا دو ردیف به این ترتیب می‌چینیم که در ردیف دوم هر سکه درست با دو سکه‌ی زیرش در تماس باشد. (برای 1 تا 4 سکه ترتیب قرار گرفتن سکه‌ها و تعداد حالات مشخص شده است.)



الف اگر S_n تعداد حالات چیدن n سکه در دو ردیف (به صورت مذکور در بالا) باشد ثابت کنید:

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$$

ب اگر بخواهیم سکه‌های قرار گرفته در ردیف بالا حتمن به هم چسبیده باشند تعداد حالات چیدن n سکه را در دو ردیف (با شرایط اخیر) حساب کرده بر حسب n بنویسید.

$n = 6$

7 حالت

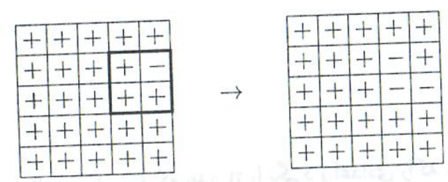
۳ یک مربع 5×5 خانه را در نظر بگیرید. در یکی از خانه‌ها علامت '−' و در بقیه علامت '+' گذاشته ایم یک بازی با قانون زیر تعریف می‌کنیم:

در هر مرحله می‌توان یک مربع به ضلع بزرگ‌تر از یک انتخاب کرده و تمام علامت‌های داخل آن را عوض کرد. ('+' به '−' و '−' به '+' تبدیل شود). پایان بازی وقتی است که تمام علامت‌ها '+' شوند. در این حالت می‌گوییم که بازی جواب دارد.

ا نشان دهید که اگر علامت '−' در خانه وسط، یعنی خانه‌یی که در سطر سوم و ستون سوم قرار دارد، گذاشته شود بازی جواب دارد. مراحل رسیدن به جواب را نشان دهید.

ب ثابت کنید که تنها حالت ممکن برای جواب داشتن بازی حالت ا است.

در شکل زیر یک مرحله از یک بازی نشان داده شده است.



پاسخ‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم دومین المپیاد

۱ این مساله، مساله‌ی Josephus نام دارد. نشان داده می‌شود عدد بازمانده $2(n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) + 1$ می‌باشد. برنامه‌ی خواسته شده در زیر آمده است.

```
program Problem1;
var
  N, P, R: Word;
  C: array [0..10000] of Word;
begin
  ReadLn(N);
  for R := 1 to N do
    C[R] := R;
  P := 1;
  for R := N downto 1 do
  begin
    P := P mod R + 1;
    WriteLn(C[P]);
    Move(C[P + 1], C[P], SizeOf(C[P]) * (R - P))
  end {for}
end.
```

۲

ا چیدن سکه‌ها برای $n > 2$ به یکی از دو گونه‌ی زیر رخ می‌دهد.

به سادگی چیدن‌های این دو گونه را با در نظر نگرفتن سکه‌های سیاه می‌توان با چیدن‌های $n - 1$ و $n - 2$ سکه متناظر ساخت. از این رو برابری گفته شده را داریم.

ب برای آمدن p سکه در ردیف یکم و q سکه در ردیف دوم اگر $0 < q < p$، $(p-1)-(q-1)$ یا $p - q$ روش چیدن داریم. برای $q = 0$ نیز 1 روش برای چیدن هست. داریم $p + q = n$؛ پس شمار

روش‌های چیدن برابر با

$$1+\sum_{q=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p-q = 1+\sum_{q=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n-2q$$

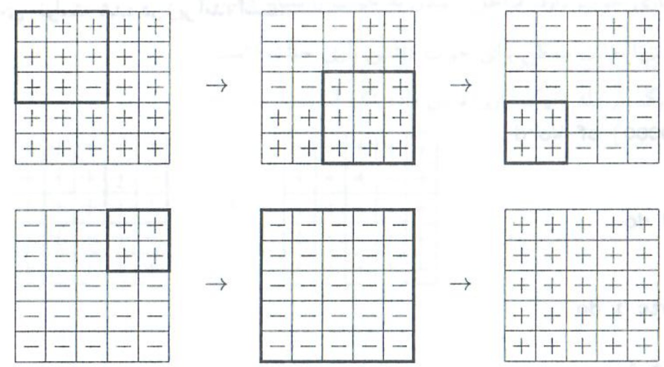
$$= 1+n\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)$$

$$= 1+\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1 \right)$$

به دست می‌آید.

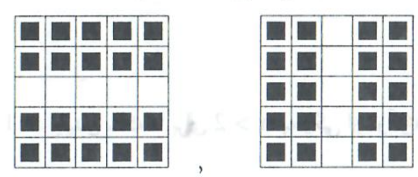
۳

ا گام‌های زیر را برمی‌داریم.



پس به سادگی به پاسخ رسیده ایم.

ب ♦ اگر '−' در خانه‌یی جز خانه‌ی میانی باشد، در دست پایین یکی از رنگ‌آمیزی‌های

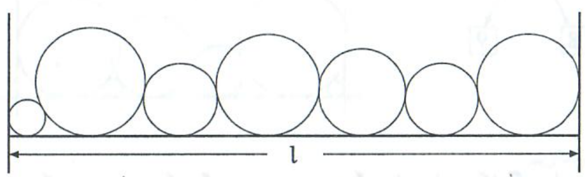


در خانه‌های سیاه جای گرفته است. هر مربع در این رنگ‌آمیزی شمار زوجی را از خانه‌های سیاه در بر می‌گیرد. پس تغییر علامت‌های خانه‌های سیاه در هر گام زوج است. به این سان مانده‌ی پیمانه‌ی 2ی شمار علامت‌های '−' ناوردا است و همواره شماری فرد علامت '−' در خانه‌های سیاه خواهد بود.

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم دومین المپیاد

۱ m دایره با شماره‌های 1 تا m و با شعاع‌های r_1 و r_2 و ... و r_m و پاره‌خطی به طول l داده شده اند. می‌خواهیم تعدادی از این دایره‌ها را انتخاب کنیم به طوری که آن‌ها بتوانند پاره‌خط را مانند شکل زیر بپوشانند.



برنامه‌یی بنویسید تا پس از دریافت ورودی‌ها، شماره‌های دایره‌های انتخاب شده را به ترتیب از چپ به راست بنویسد. در صورتی که مساله بیش از یک جواب داشته باشد، یک جواب کافی است. اگر مساله جواب ندارد، آن را نیز مشخص نمایید.

۲ می‌خواهیم n ماتریس M_1 تا M_n را در هم ضرب کنیم ($M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$) فرض کنید ابعاد ماتریس‌ها به گونه‌یی هستند که حاصل ضرب هر دو ماتریس مجاور امکان‌پذیر است می‌خواهیم تعداد ترتیب‌های مختلف برای انجام این ضرب را به دست آوریم. این ترتیب‌ها را می‌توان با استفاده از پرانتز نشان داد. فرض کنید T_n تعداد حالات پرانتزگذاری‌ی این ضرب باشد. مثلن $T_4 = 5$ و ترتیب‌های مورد نظر به قرار زیر اند:

$M_1 \times ((M_2 \times (M_3 \times M_4))$

$M_1 \times ((M_2 \times M_3) \times M_4)$

$(M_1 \times M_2) \times (M_3 \times M_4)$

$(M_1 \times (M_2 \times M_3)) \times M_4$

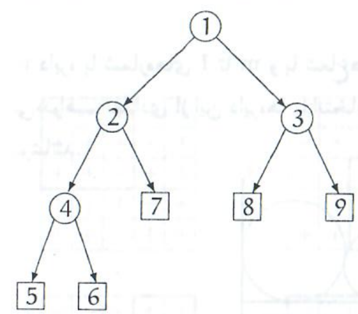
$((M_1 \times M_2) \times M_3) \times M_4$

ا فرمولی برای T_n بر حسب T_iها $(i < n)$ بنویسید و آن را اثبات کنید.

ب برنامه‌ای بنویسید تا با دریافت n، T_n را در خروجی چاپ نماید.

۶ ۱۷ تعاریف زیر را برای درخت دودویی در نظر بگیرید:

تعریف ۱. یک درخت دودویی متشکل از تعدادی نقاط داخلی و تعدادی نقاط خارجی موسوم به گره‌ها می‌باشد. از هر گره داخلی دو گره منشعب می گردند (گره چپ و گره راست) که با لبه‌های چپ و راست به آن متصل می‌شوند. از گره‌های خارجی هیچ گرهی منشعب نمی‌گردد. به طور مثال درخت دودویی‌ی زیر را در نظر بگیرید:



گره‌های مربع‌شکل گره‌های خارجی و گره‌های دایره‌شکل گره‌های داخلی می‌باشند. گره 1 موسوم به ریشه‌ی درخت می‌باشد.

تعریف ۲. طول یک مسیر از ریشه‌ی درخت B به u به یک گره (داخلی یا خارجی) در درخت مساوی تعداد گره‌ها در مسیر منهای یک است. طول مسیر را با $l(u)$ نشان می‌دهیم.

در مثال بالا داریم: $l(5) = 3$ ،$l(7) = 2$ و $l(1) = 0$

ا فرض کنید B یک درخت دودویی با m گره خارجی u_1 و ...و u_m باشد، ثابت کنید:

$$\sum_{j=1}^{m} 2^{-l(u_j)} = 1$$

برای قسمت ب قرار دهید:

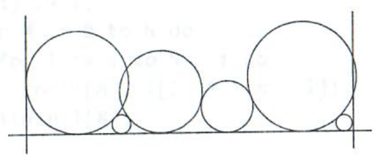
$$E(B) = \sum_{u \text{ گره خارجی}} l(u) = \text{جمع طول مسیرها از ریشه به همه‌ی گره‌های خارجی}$$

$$L(B) = \sum_{u \text{ گره داخلی}} l(u) = \text{جمع طول مسیرها از ریشه به همه‌ی گره‌های داخلی}$$

ب ثابت کنید: $E(B) = I(B) + 2n$

پاسخ‌های نوبت دوم
مرحله‌ی دوم دومین المپیاد

۴ ۴۴ برنامه‌ی ارایه شده در این جا از مرتبه‌ی نمایی است و همه‌ی جای‌گشت‌های ممکن را از m دایره بررسی می‌کند. این برنامه آرایشی را مانند



ایست می‌انگارد. برنامه را در زیر داریم.

```
program Problem4;

var
  F: Boolean;
  L: Real;
  S: array [1..100] of 0..1;
  P: array [1..100] of Byte;
  R: array [1..100] of Real;

  function Projection(M: Byte): Real;
  var
    I: Byte;
    S: Real;
  begin
    S := R[P[1]] + R[P[M]];
    for I := 1 to M - 1 do
      S := S + 2 * Sqrt(R[P[I]] * R[P[I + 1]]);
    Projection := S
  end; {procedure Projection}

  procedure Permute(B, M, N: Byte);
```

```
var
  I: Byte;
begin
  if not F and (B = M + 1) and (Projection(M) = L) then
  begin
    F := True;
    for I := 1 to M do
      Write(' ', P[I])
  end {if}
  else
    for I := B to N do
    begin
      P[B] := S[I];
      S[I] := S[B];
      Permute(B + 1, M, N);
      S[I] := P[B]
    end {for}
end; {procedure Permute}

procedure Permutations(N: Byte);
var
  I: Byte;
begin
  for I := 1 to N do
    S[I] := I;
  for I := 1 to N do
    Permute(1, I, N)
end; {procedure Permutations}

var
  I, M: Byte;

begin
  ReadLn(M, L);
  for I := 1 to M do
    ReadLn(R[I]);
  Permutations(M);
  if not F then
    WriteLn('No answer!')
end.
```

۵ ضرب نخست ارایه شده در صورت مساله شمار پرانتزهای نادرستی دارد.•

ا عمل ضرب پایانی میان دو زیرحاصل از ماتریس‌ها، به گونه‌ی $F_p \times F_q$ رخ داده است که F_p و F_q

حاصل ضرب‌های p و q ماتریس هستند. هم‌چنین داریم $p + q = n$. برای انجام ضرب پایانی به این گونه T_pT_q روش هست. پس بازگشت پیچشی‌ی

$$T_n = \sum_{p=1}^{n-1} T_p T_{n-1-p}$$

به دست می‌آید.

ب پیاده‌سازی‌ی برنامه بسیار ساده است. آن را در زیر داریم.

```
program Problem5;
var
  M, N, I: Byte;
  T: array [1..25] of Longint;
begin
  ReadLn(N);
  T[1] := 1;
  for M := 2 to N do
    for I := 1 to N - 1 do
      Inc(T[M], T[I] * T[N - I]);
  WriteLn(T[N])
end.
```

۶

ا استقرا را روی n به کار می‌بندیم. برای $m = 1$ درخت تنها شامل ریشه است. به روشنی حکم برقرار می‌باشد. در درختی با $m + 1$ گره، دورترین برگ (گره بیرونی) v را از ریشه در نظر می‌گیریم. این برگ فرزند گرهی در رده‌ی بالاتر که دو برگ دارد، است. پس با کنار گذاشتن این دو برگ، گره رده‌ی بالایی‌ی v به برگ تبدیل می‌شود. به درختی با m برگ می‌رسیم که بر پایه‌ی فرض استقرا حکم برای‌ش برقرار است. با جای‌گذاری‌ی $2^{-(L(v)+1)} + 2^{-(L(v)+1)}$ به جای $2^{-L(v)}$ به حکم برای $m + 1$ برگ می‌رسیم.

ب مشخص نیست n چه می‌باشد.• در واقع n شمار گره‌های درونی است.

استقرا را روی n به کار می‌گیریم. برای پایه‌ی $n = 0$ به روشنی درخت شامل تنها ریشه و حکم برقرار می‌باشد. درختی را با $n + 1$ گره درونی در نظر می‌گیریم. مانند قسمت پیش با کنار گذاردن دو برگ و کاستن یک گره درونی از درخت، به درختی با n گره درونی می‌رسیم. بر پایه‌ی فرض استقرا حکم برای این درخت برقرار است. به سادگی با افزودن دو برگ کنار گذاشته شده، در سوی چپ برابری افزوده شدن $2(L(v) + 1)$ و کاسته شدن $L(v)$، و در سوی راست افزوده شدن $L(v) + 2$ را داریم. پس حکم برقرار می‌گردد.

سومین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم صبح ۱۳۷۲/۱۱/۱۷، و نوبت دوم صبح ۱۳۷۲/۱۱/۱۸ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۴، و برای آزمون نوبت دوم ۴ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ دارای 10، مساله‌ی ۲ دارای 18، مساله‌ی ۳ دارای 22، مساله‌ی ۴ دارای 10، مساله‌ی ۵ دارای 15، و مساله‌ی ۶ دارای 25 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم سومین المپیاد

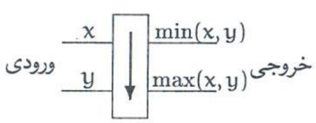
۱ ۱۹ بر روی صفحه‌یی تعداد $3n$ نقطه وجود دارد که هیچ سه تایی از آن‌ها بر روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید که می‌توان با این نقاط تعداد n مثلث ساخت که کاملن جدا از هم باشند. دو مثلث را جدا از هم می‌گوییم اگر هر یک در بیرون دیگری قرار گرفته باشد و رئوس و اضلاع آن‌ها هیچ برخوردی با یک‌دیگر نداشته باشند.

۲ ۲۰ می‌خواهیم تعدادی سکه با وزن‌های متفاوت را با یک ترازوی دوکفه‌یی و بدون استفاده از وزنه و با حد اقل تعداد وزن کردن مرتب نماییم. واضح است که سه سکه را می‌توان با حد اکثر سه بار وزن کردن مرتب نمود: ابتدا ترتیب وزن‌های دو عدد از این سکه‌ها را با یک بار وزن کردن به دست می‌آوریم. اگر $\leftarrow$ نشان دهنده‌ی رابطه‌ی کوچک‌تر باشد، نتیجه را می‌توان به صورت $\bullet\!\leftarrow\!\bullet$ نمایش داد. سپس سکه‌ی بعدی را با حد اکثر دو بار وزن کردن به این زنجیره‌ی دوتایی اضافه می‌نماییم. ترتیب نهایی به صورت $\bullet\!\leftarrow\!\bullet\!\leftarrow\!\bullet$ درمی‌آید.

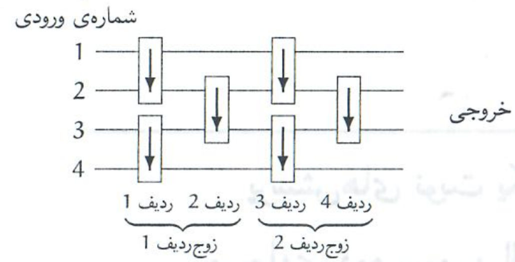
ا نشان دهید که چهار عدد سکه را می‌توان با حد اکثر 5 بار وزن کردن مرتب کرد.

ب نشان دهید که پنج عدد سکه را می‌توان با حد اکثر هفت بار وزن کردن مرتب کرد.

۳ ۲۲ یک مقایسه کننده را مطابق شکل زیر تعریف می‌کنیم:

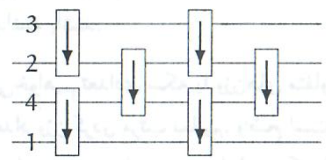


این مقایسه کننده دو عدد را به عنوان ورودی دریافت کرده، عدد کوچک‌تر را در خط اول خروجی‌ی خود و عدد بزرگ‌تر را در خط دوم خروجی قرار می‌دهد. با وصل تعدادی از این مقایسه کننده‌ها بر اساس یک نظم خاص می‌توان یک مدار مرتب کننده ساخت به طوری که تعدادی عدد را از ورودی دریافت نموده و پس از تعدادی عمل مقایسه این اعداد را به صورت مرتب در خروجی قرار دهد. به عنوان مثال شکل زیر یک مدار مرتب کننده با چهار ورودی را نشان می‌دهد:

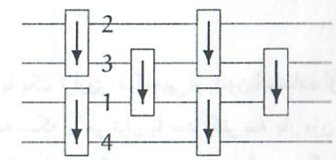


این مدار شامل 4 ردیف و 2 عدد زوج‌ردیف می‌باشد. نحوه‌ی کار یک مدار مرتب کننده به این صورت است که در هر مرحله تمامی‌ی مقایسه کننده‌های یک ردیف که دو عدد ورودی‌ی خود را دریافت کرده اند هم‌زمان با هم عمل می‌کنند. در ابتدای مرحله‌ی اول اعداد بر روی خطوط ورودی قرار دارند. پس از تعداد مراحلی برابر با تعداد ردیف‌ها اعداد به صورت مرتب در خروجی ظاهر می‌شوند.

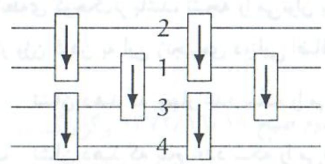
نحوه‌ی کار مدار مرتب کننده‌ی فوق برای اعداد ورودی‌ی 3 و 2 و 4 و 1 به صورت زیر است:



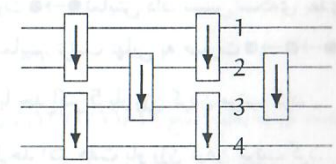
ابتدای مرحله‌ی 1



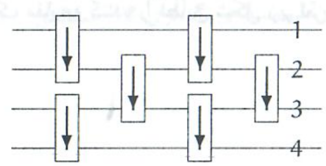
انتهای مرحله‌ی 1



انتهای مرحله‌ی 2



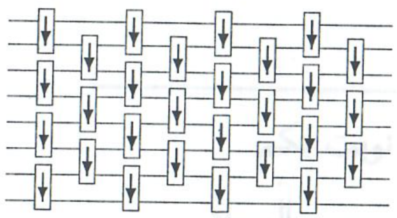
انتهای مرحله‌ی 3



انتهای مرحله‌ی 4

یک مدار مرتب کننده‌ی nتایی دارای n خط با شماره‌های 1 تا n است که ردیف‌های شماره فرد شامل مقایسه کننده‌هایی است که خطوط با شماره‌ی $2k-1$ و $2k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ را با هم مقایسه می‌کند مقایسه کننده‌های ردیف‌های زوج خطوط با شماره‌ی $2k$ و $2k+1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ را با هم مقایسه می‌نماید.

یک مدار مرتب کننده‌ی 8تایی را در شکل زیر می‌بینید:



ا حدس بزنید که یک مدار مرتب کننده‌ی nتایی حد اقل باید شامل چند زوج‌ردیف باشد و تعداد کل مقایسه کننده‌های آن را به دست آورید. در این قسمت اثبات لازم نیست.

ب ثابت کنید که مدار مرتب کننده‌ی nتایی با تعداد زوج‌ردیف‌هایی که در قسمت ا حدس زده اید، کلیه‌ی جای‌گشت‌های ورودی از اعداد صفر و یک را مرتب می‌کند. در این قسمت باید حدس بند ا را برای ورودی‌های صفر و یک به طور کامل اثبات نمایید.

برای دریافت بخشی از نمره‌ی این قسمت می‌توانید آن را برای $n = 8$ ثابت کنید.

پاسخ‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم سومین المپیاد

۱ محور مختص x را در سویی دل‌خواه بنا کرده، نقطه‌ها را به ترتیب ناکاهشی‌ی هم‌نه‌های x از 1 تا $3n$ شماره‌گذاری می‌کنیم. به روشنی سه‌گوش‌ها با راس‌های $3k - 2$، $3k - 1$، $3k$ برای k از 1 تا n سه‌گوش‌های خواسته شده هستند.

۲ سکه‌ها را به ترتیب با 1، 2، 3، . . . شماره‌گذاری می‌کنیم.

ا سکه‌های 1، 2، 3 با 3 سنجش به ترتیب $3 \to 2 \to 1$ درآمده اند. پس سکه‌ی 4 را با سکه‌ی 2 می‌سنجیم. اگر سنگین‌تر بود، سنجش آن را با 3 و اگر سبک‌تر بود، سنجش را با 1 انجام می‌دهیم. به این سان جای سکه‌ی 4 نیز پس از سنجش 5م مشخص می‌شود.

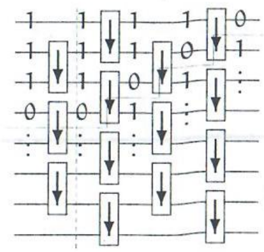
ب گیریم پی‌آمد سنجش 1 با 2 و 3 با 4 به گونه‌های $2 \to 1$ و $4 \to 3$ بوده اند. پس 1 را با 3 می‌سنجیم. پی‌آمد را $3 \to 1$ می‌انگاریم. اکنون ترتیب $4 \to 3 \to 1$ را داریم. سکه‌ی 5 در این زنجیره جای خود را با 2 سنجش می‌یابد. اکنون چون $2 \to 1$، سکه‌ی 2 دست بالا سه سکه‌ی 3، 4، 5 را برای سنجش پیش رو دارد. باز 2 سنجش برای جای‌گیری بس است.

۳

ا هر عدد با گذر از هر جفت‌ردیف دست بالا 2 خط جا به جا می‌شود. پس به دست پایین $\lceil n/2\rceil$ جفت‌ردیف نیاز هست. به این سان شمار سنجش‌گرها نمی‌تواند از $(n - 1)\lceil n/2\rceil$ کم‌تر باشد.

ب استقرا را به کار می‌بندیم. فرض استقرا را قوی کرده، نشان می‌دهیم برای هر n مدار با n ردیف سنجش‌گر یک مرتب کننده‌ی nتایی است.

اگر ورودی 0 نداشته باشد، مدار کار خود را به درستی انجام می‌دهد. گیریم نخستین ورودی‌ی 0 در خط mم رخ داده است. اگر این 0 ورودی‌ی بالایی‌ی سنجش‌گر باشد، یک ردیف به جلو می‌رویم تا ورودی‌ی پایینی گردد. پس از آن در $m - 1$ گام 0 را در خط شماره‌ی 1 داریم.



با توجه به شکل درمی‌یابیم جابه‌جا کردن نخستین ورودی‌ی 0 و نخستین ورودی‌ی 1 پس از ردیف یکم تغییری را در کارکرد تکه‌ی پایین خط جداساز پس از ردیف یکم و از این رو تغییری را در پی‌آمد پایانی‌ی مدار به دست نمی‌دهد. با انجام این جابه‌جایی و کنار نهادن خط و ردیف یکم، بر پایه‌ی فرض استقرا یک مدار مرتب کننده‌ی $n-1$ داریم. پس حکم برای مدار nتایی درست است. نشان دادن درستی‌ی پایه نیز به سادگی انجام می‌پذیرد.

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم سومین المپیاد

۴ ۲۴ در یک مدرسه n دبیر تدریس می‌کنند. این دبیرها را با شماره‌های 1 تا n نام‌گذاری می کنیم. می‌دانیم که دبیر iام، $i+1$ نفر از دانش‌آموزان مدرسه را می‌شناسد. هر دانش‌آموز می‌تواند توسط بیش از یک دبیر شناخته شود. هر یک از این دبیرها می‌خواهد یکی از دانش‌آموزانی را که می‌شناسد به عنوان نماینده‌ی خود برگزیند به شرط این که هیچ دانش‌آموزی به عنوان نماینده‌ی بیش از یک دبیر انتخاب نشود. ثابت کنید که انتخاب این نماینده‌ها حد اقل به 2^n حالت مختلف امکان‌پذیر است.

۵ ۲۵ فرض کنید n یک عدد طبیعی‌ی بزرگ‌تر از یک باشد. ثابت کنید برای

$$k = \left\lceil 3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \right\rceil$$

دنباله‌ی $\langle A_1, A_2, \dots, A_k \rangle$ وجود دارد به طوری که

- $A_i \subseteq \{1,2,\dots,n\} \quad ; \quad A_i \neq A_j$
- $|A_i \triangle A_j| = 1 \iff |i-j| = 1, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n$

منظور از $A_i \triangle A_j$ تفاضل متقارن A_i و A_j یعنی $(A_i - A_j) \cup (A_j - A_i)$ است. هم‌چنین $\lceil x \rceil$ نمایان‌گر کوچک‌ترین عدد صحیح ناکم‌تر از x است.

مثال. در حالت $n=3$ خواهیم داشت $k=5$ و دنباله‌ی مورد نظر می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$A_1 = \{\}, A_2 = \{1\}, A_3 = \{1,2\}, A_4 = \{1,2,3\}, A_5 = \{2,3\}$$

(راه‌نمایی: می‌توانید از استقرا استفاده نمایید.)

۶ ۲۶ فرض کنید n یک عدد طبیعی $(n>2)$ و r یک عدد حقیقی $(0 \leqslant r \leqslant 1)$ باشد. دو نفر با نام‌های A و B با یک‌دیگر بازی‌ی زیر را انجام می‌دهند: A یک عدد طبیعی‌ی x $(1 \leqslant x \leqslant n)$ را در نظر می گیرد. B باید عدد x را پیدا کند. برای این منظور، سوال‌هایی از A می‌پرسد. سوال‌هایی که B از A می پرسد به این

صورت هستند که "آیا x از k بزرگ‌تر است؟" (k می‌تواند هر عدد طبیعی‌ی بین 1 و n باشد و توسط B انتخاب می‌شود). جواب‌های A به صورت "بله" یا "خیر" است. A ممکن است در جواب بعضی از سوالات دروغ بگوید. اما می‌دانیم که برای هر عدد طبیعی‌ی i تعداد دروغ‌هایی که A می‌تواند در جواب سوالات اول تا iم بگوید از $\lfloor ri \rfloor$ تجاوز نمی‌کند. (منظور از $\lfloor x \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح نابیش‌تر از x است).

ا الگوریتمی بنویسید که بافرض $r < 1/2$ عدد طبیعی‌ی n و عدد حقیقی‌ی r را از ورودی دریافت کرده و به جای B بازی کند. یعنی سوالاتی به شکل "`Is x>k?`" در خروجی چاپ کرده پاسخ‌های A را از ورودی دریافت نماید و با توجه به این پاسخ‌ها و این شرط که A نمی‌تواند به بیش از $\lfloor ri \rfloor$ تا از i سوال اول پاسخ دروغ دهد، عدد x را پیدا کند.

در مورد ایده‌ی الگوریتم خود توضیح داده و متغیرهای آن را معرفی نمایید.

مثال.

```
Enter n: 10
Enter r: 0.25

IS X > 5? YES
IS X > 8? NO
IS X > 7? NO
IS X > 6? YES
IS X > 5? NO

The number (X) is 7
```

ب ثابت کنید که اگر $r \geqslant 1/2$ باشد A می‌تواند طوری به سوالات B جواب دهد که B هیچ گاه نتواند x را پیدا کند. (یعنی هم‌واره بیش از یک امکان برای عدد x موجود باشد).

پاسخ‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم سومین المپیاد

---

۴ حکم را برای n دبیر درست می‌انگاریم. گیریم $n+1$ دبیر هستند. دبیرهای 1 تا n نمایندگان خود را می‌توانند به دست پایین 2^n راه برگزینند. هر یک از گزینش‌های آنان دست بالا n نفر را از $n+2$ دانش‌آموزی که دبیر $n+1$م می‌شناسد، کنار می‌گذارد. پس دبیر $n+1$م دست پایین 2 راه برای گزینش نماینده‌ی خود دارد. درستی‌ی پایه‌ی $n=0$ نیز روشن است.

۵ حکم به روشنی برای $n=2$ برقرار است. حکم را برای $n-1$ که $n>2$، درست می‌انگاریم. پس از روی دنباله‌ی $\langle A_1, A_2, A_3, \ldots \rangle$ برای $n-1$، دنباله‌ی جدید

$$\langle A_1, A_1 \cup \{n\}, A_2 \cup \{n\}, A_3 \cup \{n\}, A_3, A_4, A_5, A_5 \cup \{n\}, \ldots \rangle$$

را می‌سازیم. این دنباله شرایط خواسته شده را برآورده می‌سازد. (چه‌را؟)

۶

ا ۞ تا کنون q پرسش و l پاسخ دروغ داشته ایم. پرسش جدید را m بار می‌پرسیم. اگر شمار پاسخ‌های نادرست را f بگیریم، باید داشت $l + f \leqslant \lfloor r(q+m) \rfloor$. اگر شمار هیچ یک از دو پاسخ Yes و No نتواند ما را به پاسخ درست برساند، باید داشت $l + m + l \leqslant 2\lfloor r(q+m) \rfloor$. پس اگر $2l + m > 2r(q+m)$ می‌توان پاسخ درست را یافت. به این سان کافی است پرسش m بار پرسیده شود که $m > 2(rq - l)/(1-2r)$.

```
program Problem6;

  function Max(A, B: LongInt): LongInt;
  begin
    if A > B then
      Max := A
    else
      Max := B
```

```
end; {function Max}

function Answer(K: LongInt; R: Real; var Q, L: LongInt): Boolean;
var
  Y, N: LongInt;
  A: string;
begin
  Y := 0;
  N := 0;
  while Max(Y, N) <= Trunc(R * (Q + Y + N)) - L do
  begin
    Write('IS X > ', K, '? ');
    ReadLn(A);
    if A = 'YES' then
      Inc(Y)
    else if A = 'NO' then
      Inc(N)
  end; {while}
  Inc(Q, Y + N);
  Inc(L, Y + N - Max(Y, N));
  Answer := Y > N
end; {function Answer}

function BinarySearch(BIdx, EIdx: LongInt; R: Real): LongInt;
const
  Q: LongInt = 0;
  L: LongInt = 0;
begin
  while BIdx < EIdx do
    if Answer((BIdx + EIdx) shr 1, R, Q, L) then {EiD}
      BIdx := (BIdx + EIdx) shr 1 + 1
    else
      EIdx := (BIdx + EIdx) shr 1;
  BinarySearch := BIdx
end; {function BinarySearch}

var
  N: LongInt;
  R: Real;

begin
  Write('Enter n: ');
  ReadLn(N);
  Write('Enter r: ');
```



```
  ReadLn(R);
  N := BinarySearch(1, N, R);
  WriteLn('The number (X) is ', N)
end.
```

ب. اگر داشته باشیم $r = 1$، پاسخ‌های A چیزی به دست نمی‌دهند. گیریم $r \neq 1$. پس نخستین پاسخ A به ناچار راست است. اگر B به پاسخ دست نیافته باشد، مجموعه‌ی عددهای $\{m_1, m_1 + 1, \ldots, m_2\}$ را که دارای دست پایین دو عضو است، پیش رو دارد. (اگر عدد انگاشته‌ی A، 1 باشد و B پرسش را برای 1 مطرح سازد، به پاسخ می‌رسد.) از این پس A نیمی از پرسش‌ها را برای این عددها پاسخ راست و نیمی دیگر را پاسخ دروغ می‌دهد.

چهارمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم صبح ۱۳۷۳/۱۱/۱، و نوبت دوم صبح ۱۳۷۳/۱۱/۳ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۴٫۵، و برای آزمون نوبت دوم ۴٫۵ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ دارای 10، مساله‌ی ۲ دارای 10، مساله‌ی ۳ دارای 15، مساله‌ی ۴ دارای 15، مساله‌ی ۵ دارای 10، مساله‌ی ۶ دارای 10، مساله‌ی ۷ دارای 15، و مساله‌ی ۸ دارای 15 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد

1. n گلوله با وزن‌های متفاوت و یک ترازوی دوکفه‌یی بدون وزنه داده شده است. نشان دهید که با حد اکثر $\lceil 3n/2 - 2\rceil$ بار وزن کردن می‌توان سبک‌ترین و سنگین‌ترین گلوله‌ها را مشخص کرد. روش وزن کردن خود را به دقت توضیح دهید و فرمول فوق را برای کلیه‌ی مقادیر n اثبات کنید. (منظور از $\lceil x\rceil$ —بخوانید سقف x— کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی‌ی x است.)

2. مجموعه‌ی $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ را در نظر بگیرید. دنباله‌ی $T_1, T_2, \ldots, T_n$ یک زنجیره به طول n خوانده می‌شود، اگر هر یک از T_iها یک زیرمجموعه‌ی A باشد و برای هر $1 \leqslant i \leqslant n-1$ داشته باشیم: $T_i \subseteq T_{i+1}$.
تعداد زنجیره‌های به طول n را محاسبه کنید و ادعای خود را اثبات نمایید.

3. در یک جزیره k انسان‌نما زندگی می‌کنند. این انسان‌نماها دوگونه اند: عده‌یی راست‌گو هستند و به هر پرسش جواب درست می‌دهند. عده‌یی دیگر دروغ‌گو هستند و به هر پرسش جواب نادرست می‌دهند.
اگر انسانی به این جزیره برود، می‌تواند با مطرح کردن پرسش‌هایی مانند زیر که جواب آن‌ها بله یا خیر است، این دو دسته را از هم تشخیص دهد.
به عنوان مثال، فرض کنید A راست‌گو و B دروغ‌گو است. در این صورت، پرسش‌ها و پاسخ‌ها می‌تواند به صورت زیر باشد:

پرسش از A: آیا B دروغ‌گو است؟ جواب: بله

پرسش از A: آیا A و B دروغ‌گو هستند؟ جواب: خیر

پرسش از B: آیا $4 = 2 + 2$؟ جواب: خیر

پرسش از B: آیا تو دروغ‌گو هستی؟ جواب: خیر

n تبه‌کار به این جزیره فرار کرده اند. این افراد تبه‌کار، در پاسخ به هر پرسش هر طور که بخواهند جواب می‌دهند، یعنی گاهی جواب درست و گاهی جواب نادرست می‌دهند.

کارآگاهی وظیفه دارد به این جزیره رفته و با مطرح کردن پرسش‌هایی نظیر پرسش‌های فوق (فقط با جواب بله یا خیر) این تبه‌کاران را شناسایی و بازداشت کند.

فرض کنید که تبه‌کاران و انسان‌نماها از نظر شکل ظاهری تفاوتی ندارند ولی یک‌دیگر را خوب می‌شناسند و می‌دانند که هر کدام از چه گروهی (راستگو، دروغ‌گو یا تبه‌کار) هستند. هم‌چنین می‌دانیم کارآگاه از قبل اطلاعی در مورد این که هر یک از ساکنین این جزیره از کدام گروه است، ندارد.

ا ثابت کنید که اگر $n = 1$ و $k \geqslant 2$، کارآگاه می‌تواند فرد تبه‌کار را شناسایی کند.

ب ثابت کنید که درحالت کلی اگر $k < n$، کارآگاه می‌تواند افراد تبه‌کار را شناسایی کند.

پ ثابت کنید که اگر $k \leqslant n$، کارآگاه نمی‌تواند افراد تبه‌کار را شناسایی کند. یعنی افراد تبه‌کار می‌توانند طوری به پرسش‌های کارآگاه جواب دهند که کارآگاه هیچ‌گاه نتواند مطمئن شود که یک فرد، تبه‌کار است.

۴ الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم عناصر آرایه‌ی a را محاسبه می‌کند. عنصر iام آرایه‌ی a را در این الگوریتم با نماد $a[i]$ نشان داده ایم. ۲۲

۱. $a[0]$ را مساوی 0 و $a[1]$ را مساوی 1 قرار بده.

۲. k را مساوی 2 قرار بده.

۳. $a[k]$ را مساوی با $a[k-1]$ قرار بده.

۴. به مقدار $a[k]$ یکی اضافه کن.

۵. F را مساوی 1 قرار بده.

۶. برای هر i که $1 \leqslant i \leqslant k-1$ این مرحله را تکرار کن:

- برای هر j که $0 \leqslant j \leqslant i-1$ این مرحله را تکرار کن:
  - اگر $a[k] - a[i] = a[i] - a[j]$ است، F را مساوی 0 قرار بده.

۷. اگر $F = 0$ است، به مرحله‌ی (۴) برو.

۸. به مقدار k یکی اضافه کن و اگر $k \leqslant 1373$ است، به مرحله‌ی (۳) برو.

۹. پایان

الگوریتم فوق به زبان پاسکال در زیر† نوشته شده است.

مساله به این صورت است:

ا مقدار $a[0]$، $a[1]$، ... و $a[10]$ در انتهای الگوریتم چه قدر است؟

ب تمام iهایی را پیدا کنید که مقدار $a[i]$ در انتهای الگوریتم بر 3 قابل قسمت باشد. برای ادعای خود دلیل بیاورید.

پ مقدار $a[1373]$ در انتهای الگوریتم چه قدر است؟ چرا؟

```
program Problem4;
var
  a: array [0..1373] of Longint;
  k, i, j, f: Integer;
begin
  a[0] := 0; a[1] := 1;
  for k := 2 to 1373 do
  begin
    a[k] := a[k - 1];
    repeat
      a[k] := a[k] + 1;
      F := 1;
      for i := 1 to k - 1 do
        for j := 0 to i - 1 do
          if (a[k] - a[i] = a[i] - a[j]) then
            F := 0;
    until (F = 1);
  end;
end.
```

پاسخ‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد

۱ درستی‌ی حکم برای پایه‌های $n = 1$ و $n = 2$ روشن است. استقرا را با گام دوتایی به کار می‌گیریم. با $\lceil 3n/2 - 2 \rceil$ سنجش سبک‌ترین و سنگین‌ترین را میان n گلوله از $n + 2$ گلوله می‌یابیم. پس دو گلوله‌ی مانده را با هم سنجیده، سبک‌تر آن دو را با سبک‌ترینِ n گلوله و سنگین‌ترشان را با سنگین‌ترینِ n گلوله می‌سنجیم. به این سان با افزایش 2 گلوله به 3 سنجش بیش‌تر نیاز شد که درستی‌ی حکم را به دست می‌دهد.

۲ هر عضو A یا نخستین رخ دادن را در T_1، T_2، ...، یا T_n دارد، یا در زنجیره رخ نداده است. پس هر عضو $n + 1$ روش رخ‌داد دارد. به این سان شمار زنجیره‌ها $(n+1)^k$ به دست می‌آید.

۳ مساله تصریح نکرده است که کارآگاه شمار تبه‌کاران را می‌داند.• این اشکال نخست مساله می‌باشد!

آ از فرد دل‌خواه p "دو دو تا، چهار تا؟"را پرسیده، بر پایه‌ی پاسخ درست یا نادرست، او را راست‌گو یا دروغ‌گو می‌انگاریم. سپس درباره‌ی تبه‌کار بودن همه‌ی افراد دیگر از او می‌پرسیم. اگر او کم‌تر یا بیش‌تر از 1 نفر را تبه‌کار دانست، خود تبه‌کار است. اگر تنها 1 تن، p' را تبه‌کار خواند، یکی از p و p' تبه‌کار است. پس، از فرد دیگری پس از تشخیص گونه‌اش، درباره‌ی تبه‌کار بودن p می‌پرسیم.

ب ♦ با یک پرسش از هر کس راست‌گوها و دروغ‌گوها را جدا می‌کنیم. تبه‌کاران نیز میان این دو گروه پخش می‌شوند. اکنون یکی را برگزیده، از همه، شامل هم‌این فرد، درباره‌ی تبه‌کاری‌ی او می‌پرسیم. پاسخ گروه دروغ‌گو را نقیض می‌کنیم. یکی از پاسخ‌های مثبت و منفی بیش‌تر به دست آمده است. پاسخ بیش‌تر پاسخ درست است. بر این شیوه می‌توان تبه‌کار بودن یا نبودن همه‌ی افراد را دریافت.

پ ♦♦ این قسمت مساله نادرست است و برای همه‌ی nها و kها برقرار نمی‌باشد.• برای $n = k$ تبه‌کاران خود را در تناظری یک به یک با انسان‌نماها قرار داده، خود و تبه‌کاران دیگر را انسان‌نما به هم‌آن گونه‌ی اصلی‌ی راست‌گو یا دروغ‌گو در گروه انسان‌نماها، و انسان‌نماها را تبه‌کار می‌خوانند. به این سان کارآگاه نمی‌تواند دریابد کدام گروه تبه‌کار و کدام گروه انسان‌نما است. برای $n = mk$ نیز روشی به هم‌این گونه با کمی تغییر به کار می‌آید. (چه‌گونه؟)

۲ با پی‌گیری‌ی الگوریتم درمی‌یابیم $a[(d_m \cdots d_1 d_0)_2] = (d_m \cdots d_1 d_0)_3$. به بیان دیگر برای یافتن $a[n]$ کافی است n را به پایه‌ی 2 برده، در پایه‌ی 3 در نظر گیریم. درستی‌ی این کار را می‌توان با استقرا نشان داد.

ا داریم $a[0 \cdot\cdot 10] = (0, 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, 27, 28, 30)$.

ب $a[n]$ بر 3 بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر در پایه‌ی 3 یکان 0 داشته باشد. پس n باید در پایه‌ی 2 یکان 0 داشته باشد. به این سان $a[n]$ برای nهای بخش‌پذیر بر 2، بر 3 بخش‌پذیر است.

پ داریم $a[1373] = a[(10101011101)_2] = (10101011101)_3 = 66457$.

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد

۵/۳۶ رستورانی را در نظر بگیرید که دارای 23 سندلی با شماره‌های 1 تا 23 است. این سندلی‌ها در یک خط مستقیم قرار دارند. فرض کنید که مشتریان این رستوران، به صورت یک‌نفره و یا در دسته‌های دونفره وارد رستوران می‌شوند و اعضای هر دسته‌ی دونفره با هم از رستوران خارج می‌شوند. هم‌چنین فرض کنید که هیچ گاه در یک زمان بیش‌تر از 16 نفر مشتری در این رستوران وجود ندارد.

ثابت کنید که اگر هیچ مشتری یک‌نفره در سندلی‌های با شماره‌ی 2، 5، 8، 11، 14، 17 و 20 ننشیند، آن گاه هم‌واره می‌توان مشتری‌های دونفره را بدون جدا کردن از یک‌دیگر در سندلی‌های کنار هم در رستوران نشاند. (توجه داشته باشید که هیچ مشتری‌ی نشسته را نمی‌توان تغییر مکان داد.)

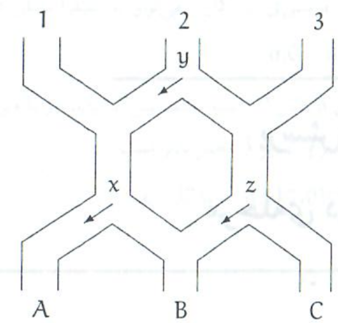
۶/۳۷ در کارخانه‌یی یک دست‌گاه وجود دارد که باید n کار را انجام دهد. می‌دانیم که انجام کار iم به اندازه‌ی t_i از این دست‌گاه وقت می‌گیرد و باید حد اکثر تا زمان d_i تحویل داده شود. فرض کنید که دست‌گاه در زمان صفر شروع به کار می‌کند. علاوه بر این، می‌دانیم که این دست‌گاه نمی‌تواند در هر لحظه بیش از یک کار را انجام دهد.

اگر دست‌گاه در زمان s_i شروع به انجام کار iم کند، انجام آن در زمان $s_i + t_i$ به پایان خواهد رسید. اگر $s_i + t_i > d_i$، یعنی کار iم در زمانی که باید تحویل داده شود هنوز به طور کامل انجام نشده باشد، مقدار $L_i = s_i + t_i - d_i$ را دیرکرد کار iم می‌نامیم. در غیر این صورت دیرکرد کار iم برابر با صفر تعریف می‌شود. دیرکرد کل دست‌گاه برابر با بیش‌ترین دیرکرد کارها، یعنی، $L = \max\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$ تعریف می‌شود. می‌خواهیم ترتیب انجام کارها را به گونه‌یی پیدا کنیم که مقدار دیرکرد کل دست‌گاه حد اقل شود. برای این منظور الگوریتمی به این صورت پیش‌نهاد داده شده است:

ابتدا کارها را بر حسب مقدار d_i آن‌ها به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم و دست‌گاه کارها را به این ترتیب انجام می‌دهد.

ثابت کنید که این الگوریتم درست عمل می‌کند، یعنی اگر کارها را به این ترتیب انجام دهیم، مقدار دیرکرد کل دست‌گاه حد اقل می‌شود.

۷ دستگاهی مانند شکل زیر را در نظر بگیرید:



در هر یک از ورودی‌های 1، 2 و 3 می‌توانیم یک گلوله بیندازیم. این گلوله به سوی پایین حرکت می‌کند و با توجه به وضعیت کلیدهای x، y و z از یکی از خروجی‌های A، B یا C خارج می‌شود. کلیدهای x، y و z به این صورت عمل می‌کنند: هر کلید می‌تواند در یکی از دو وضعیت ↘ یا ↙ باشد، اگر کلید در وضعیت ↘ باشد، گلوله را به سمت راست و اگر در وضعیت ↙ باشد، گلوله را به سمت چپ می‌فرستد. علاوه بر این با عبور هر گلوله از یک کلید، وضعیت آن کلید تغییر می‌کند.

در ابتدای شروع کار دستگاه، هر سه کلید در وضعیت ↙ هستند. یک دنباله مانند $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$، ($a_i \in \{1,2,3\}$ برای هر i) به عنوان دنباله‌ی ورودی‌ی دستگاه داده می‌شود. پس از این ابتدا یک گلوله از ورودی‌ی شماره‌ی a_1، سپس یک گلوله از ورودی‌ی شماره‌ی a_2، ... و در انتها یک گلوله از ورودی‌ی شماره‌ی a_n به درون دستگاه می‌اندازیم. فرض می‌کنیم که گلوله‌ها به ترتیب از خروجی‌های b_1، b_2، ... و b_n خارج شوند ($b_i \in \{A,B,C\}$ برای هر i). دنباله‌ی $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ را دنباله‌ی خروجی‌ی دستگاه برای ورودی‌ی $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ می‌نامیم.

به عنوان مثال دنباله‌ی خروجی‌ی دستگاه برای ورودی $\langle 1,2,3,2,1 \rangle$، دنباله‌ی $\langle A,B,B,C,A \rangle$ است.

الف الگوریتمی بنویسید که با دریافت یک دنباله‌ی ورودی، دنباله‌ی خروجی‌ی آن را پیدا کند.

ب الگوریتمی بنویسید که با دریافت یک دنباله‌ی $\langle s_1, s_2, \ldots, s_n \rangle$ ($s_i \in \{A,B,C\}$ برای هر i) مشخص کند که آیا این دنباله می‌تواند خروجی‌ی دستگاه باشد یا خیر؟ الگوریتم شما باید سریع باشد، یعنی امتحان کردن تمام حالت‌ها مورد نظر نیست.

۸ یک دسته کارت شامل $2n$ کارت که روی آن‌ها عددهای 0، 1، ...، $2n-1$ نوشته شده است، داده شده است. می‌توانیم با انجام عمل زیر روی این دسته کارت، یک دسته کارت دیگر که در آن ترتیب قرارگرفتن کارت‌ها تغییر کرده است، بسازیم:

ابتدا دسته کارت را به دو دسته که اولی شامل n کارت اول و دومی شامل n کارت باقی مانده است، تقسیم

می‌کنیم. سپس به ترتیب یک کارت از دسته‌ی اول و یک کارت از دسته‌ی دوم برمی‌داریم و این کار را آن قدر تکرار می‌کنیم تا تمام کارت‌ها برداشته شوند.

به عنون مثال اگر شماره‌ی کارت‌های قرارگرفته در دسته‌ی اول به ترتیب برابر با $8,3,4,5,2,6,1,7$ باشد، پس از انجام عمل فوق، ترتیب قرار گرفتن کارت‌ها به صورت $8,2,3,6,4,1,5,7$ خواهد بود.

عمل فوق را بر زدن دسته کارت می‌نامیم.

الف ثابت کنید که برای هر n، اگر دسته کارت را بر بزنیم، سپس دسته کارت حاصل را دوباره بر بزنیم و هم‌این کار را تکرار کنیم، بالاخره پس از مدتی به هم‌آن دسته کارت اولیه می‌رسیم.

ب برای $n = 10$ چند بار باید عمل بر زدن را تکرار کنیم تا به دسته کارت اولیه برسیم؟ (برای جواب خود دلیل بیاورید.)

پ ثابت کنید که برای $n = 2^k$ پس از $k+1$ بار بر زدن به دسته کارت اولیه می‌رسیم.

ت ثابت کنید که برای $n = 2^k + 1$ پس از $2k + 2$ بار بر زدن به دسته کارت اولیه می‌رسیم.

پاسخ‌های نوبت دوم
مرحله‌ی دوم چهارمین المپیاد

۵ اگر نتوان چنین کرد، در هر یک از دسته‌ی خانه‌های $\{1,2,3\}$، $\{4,5,6\}$، $\{7,8,9\}$، $\{10,11,12\}$، $\{13,14,15\}$، $\{16,17,18\}$، $\{19,20,21\}$ باید دست پایین دو نفر نشسته باشند. پس دست پایین 14 مشتری در رستوران هست و می‌توان یک جفت مشتری جدید را در خانه‌های خالی‌ی 22 و 23 نشاند.

۶ می‌خواهیم نشان دهیم آرایش افزایشی بر حسب d یک آرایش بهینه برای کمینه ساختن دیرکرد دست‌گاه است. درستی‌ی پایه برای $n = 2$ با توجه به نابرابری‌های زیر روشن می‌گردد:

$$d_1 \leqslant d_2 \implies \max\{t_1 - d_1, t_1 + t_2 - d_2, 0\} \leqslant \max\{t_2 - d_2, t_1 + t_2 - d_1, 0\}.$$

آرایش بهینه‌یی را برای انجام n کار در نظر می‌گیریم. بر پایه‌ی فرض استقرا می‌توان کارهای 1 تا $n - 1$ را به ترتیب افزایشی‌ی d درآورد. این کار بر دیرکرد کار nم اثری ندارد. از این رو ترتیب انجام هم‌چنان بهینه است. کارهای 2 تا n را نیز در آرایش جدید و پس از آن دوباره کارهای 1 تا n را در آرایش به دست آمده به ترتیب افزایشی‌ی d درمی‌آوریم. به روشنی ترتیب انجام به دست آمده بهینه و افزایشی بر حسب d است.

۷

ا تکلیف کلید y را به سادگی می‌توان مشخص کرد؛ ورودی‌ی 2 را به ترتیب تبدیل به ورودی‌های 1 و 3 می‌کنیم.

```
program Problem7a;
var
  I, O: string;
  C, X, Y, Z: Byte;
begin
  ReadLn(I);
  for C := 1 to Length(I) do
    if I[C] = '2' then
    begin
      I[C] := Chr(Ord('1') + 2 * Y);
```

```
      Y := 1 - Y
    end; {if}
  for C := 1 to Length(I) do
    case I[C] of
      '1':
      begin
        O[C] := Chr(Ord('A') + X);
        X := 1 - X
      end; {1}
      '3':
      begin
        O[C] := Chr(Ord('B') + Z);
        Z := 1 - Z
      end {3}
    end; {case}
  O[0] := I[0];
  WriteLn(O)
end.
```

ب آن گونه که در قسمت پیش دیدیم، می‌توانیم بینگاریم تنها ورودی‌های 1 و 3 را داریم.

```
program Problem7b;
var
  O: string;
  C, X, Z: Byte;
  F: Boolean;
begin
  ReadLn(O);
  for C := 1 to Length(O) do
  begin
    case O[C] of
      'A':
        if X = 0 then
          X := 1
        else
          F := True;
      'B':
        if (X = 1) and (Z = 1) then
          X := 0
        else if (X = 0) and (Z = 0) then
          Z := 1
        else if (X = 1) and (Z = 0) then
          if C < Length(O) then
            case O[C + 1] of
              'A', 'B':
```



```
                X := 0;
              'C':
                Z := 1
            end {case}
          else
            X := 0
        else
          F := True;
      'C':
        if Z = 1 then
          Z := 0
        else
          F := True;
    end; {case}
  end; {for}
  WriteLn(not F)
end.
```

۸

ا کارت‌ها می‌توانند به دست بالا $n!$ آرایش جای گیرند. پس در دست بالا $n!$ بر زدن به آرایشی تکراری می‌رسیم. بر زدن برگشت‌پذیر است. (چه‌را؟) پس نخستین آرایش تکراری هم‌آن آرایش آغازین است. چه‌را؟ اگر آرایش دیگر ِ گام ِ a، پیش از دیگر آرایش‌ها در گام b به تکرار برسد، باید آرایش‌های گام‌های $a-1$ و $b-1$ نیز یک‌سان باشند.

ب کارت‌های شماره‌های 0 و 19 هم‌واره در جای خود می‌مانند. کارت‌های دیگر نیز در آرایش گردشی‌ی $[1, 2, 4, 8, 16, 13, 7, 14, 9, 18, 17, 15, 11, 3, 6, 12, 5, 10]$ قرار گرفته، پس از 18 بر زدن در جای آغازین جای می‌گیرند.

پ اگر کارت a در جای‌گاه m باشد، پس از یک بر زدن، برای $m < 2^k$ در جای‌گاه $2m$، و برای $m \geqslant 2^k$ در جای‌گاه $2m - (2^{k+1} - 1)$ خواهد بود. (چه‌را؟) به طور کلی برای $m \neq 2^{k+1} - 1$، کارت a پس از s بار برزدن در جای‌گاه $2^s m \bmod (2^{k+1} - 1)$ است. پس برای رسیدن به آرایش آغازین باید هم‌نهشتی‌ی $2^s m \equiv m \pmod{2^{k+1} - 1}$ برآورده شود. برای $m = 1$ به سادگی کوچک‌ترین پاسخ هم‌نهشتی‌ی $2^s - 1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1} - 1}$، برابر $s = k + 1$ می‌باشد. این پاسخ هم‌نهشتی‌ی آغازین را نیز برای هر m برآورده می‌سازد.

ت اگر شمار بر زدن‌های مورد نیاز را s گیریم، باید هم‌نهشتی‌ی $2^s m \equiv m \pmod{2^{k+1} + 1}$ را برآورده سازیم. (چه‌را؟) به روشنی $s = 2(k + 1)$ این هم‌نهشتی را برآورده می‌سازد. (چه‌را؟)

پنجمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم صبح ۱۳۷۴/۹/۲۴، و نوبت دوم عصر ۱۳۷۴/۹/۲۶ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۴٫۵، و برای آزمون نوبت دوم ۴٫۵ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ دارای 8، مساله‌ی ۲ دارای 10، مساله‌ی ۳ دارای 17، مساله‌ی ۴ دارای 20، مساله‌ی ۵ دارای 10، مساله‌ی ۶ دارای 15، مساله‌ی ۷ دارای 15، و مساله‌ی ۸ دارای 15 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم پنجمین المپیاد

می‌خواهیم با استفاده از $(n^3-(n-2)^3)/2$ عدد آجر $2\times 1\times 1$ شکل پوسته‌ی خارجی‌ی یک مکعب $n\times n\times n$ را بسازیم. (منظور از پوسته‌ی خارجی‌ی مکعب $n\times n\times n$، یک مکعب $n\times n\times n$ است که یک مکعب $(n-2)\times(n-2)\times(n-2)$ از وسط آن برداشته شده است.) ثابت کنید که این کار تنها وقتی امکان‌پذیر است که n عددی زوج باشد.

فرض کنید که یک ماشین در اختیار داریم که می‌تواند این سه کار را بر روی کارت‌هایی که بر روی هر یک از آن‌ها یک کلمه نوشته شده است انجام دهد:

- دو کارت که بر روی آن‌ها دو کلمه نوشته شده است را بگیرد و یک کارت تولید کند که بر روی آن این دو کلمه پشت سر هم نوشته شده اند. (برای مثال اگر بر روی کارت اول رشته‌ی aab و بر روی کارت دوم رشته‌ی bab نوشته شده باشد، خروجی‌ی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن $aabbab$ نوشته شده است.)
- یک کارت که بر روی آن کلمه‌ی S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارتی ایجاد کند که بر روی آن aSb نوشته شده است. (برای مثال اگر بر روی کارت ورودی کلمه‌ی aba نوشته شده باشد، خروجی‌ی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمه‌ی $aabab$ نوشته شده است.)
- یک کارت که بر روی آن کلمه‌ی S نوشته شده است را دریافت کند و در خروجی کارتی ایجاد کند که بر روی آن bSa نوشته شده است. (برای مثال اگر بر روی کارت ورودی هیچ کلمه‌یی نوشته نشده باشد، خروجی‌ی ماشین کارتی خواهد بود که بر روی آن کلمه‌ی ba نوشته شده است.)

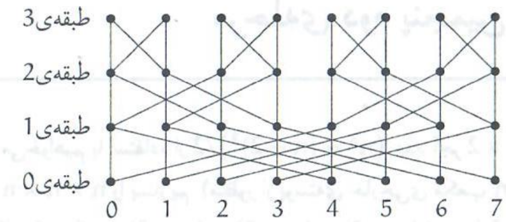
در ابتدا تعداد زیادی کارت که بر روی آن‌ها هیچ کلمه‌یی نوشته نشده است در اختیار ما قرار گرفته است.

ا نشان دهید که با استفاده از این کارت‌ها و با این ماشین می‌توان کارتی را ایجاد کرد که بر روی آن کلمه‌ی $abbaba$ نوشته شده باشد.

ب ثابت کنید که با استفاده از این ماشین می‌توان هر کارتی که بر روی آن یک کلمه نوشته شده است را تولید کرد، اگر و فقط اگر این کلمه تنها از a و b تشکیل شده باشد و تعداد aهای آن

برابر تعداد bهای آن باشد.

۳. یک ساختمان چهارطبقه به شکل عجیبی ساخته شده است. طبقات با شماره‌های صفر (هم‌کف) تا 3 شماره‌گذاری شده اند. در هر طبقه 8 اتاق با شماره‌های صفر تا 7 (به ترتیب از چپ به راست) قرار دارند و در هر یک از اطاق‌های طبقات 1 تا 3، یک نفر قرار دارد. اتاق‌ها از طریق کانال‌های مستقیم و یا کج مطابق شکل زیر به اتاق‌های طبقه‌ی پایین راه دارند.



الف) فرض کنید که یک توپ در اتاق شماره‌ی i از طبقه‌ی سوم قرار دارد ($0 \leqslant i \leqslant 7$). بر روی این توپ عدد j نوشته شده است ($0 \leqslant j \leqslant 7$). می‌خواهیم این توپ را از طریق کانال‌های موجود به اتاق شماره‌ی j از طبقه‌ی هم‌کف بفرستیم. این کار توسط افرادی که در اتاق‌ها هستند بدین صورت انجام می‌شود که هر فرد با دریافت توپ و تنها بر اساس شماره‌ی اتاق و شماره‌ی طبقه‌یی که در آن قرار دارد و نیز عدد j که بر روی توپ نوشته شده است تصمیم می‌گیرد که توپ را از طریق یکی از کانال‌های مستقیم یا کج به اتاق طبقه‌ی پایین ارسال کند (توپ هیچ گاه به طبقه‌ی بالا نمی‌رود). مشخص کنید که این افراد بر اساس چه الگوریتمی می‌توانند این کار را انجام دهند. توجه کنید که لازم است کلیه‌ی افراد بر اساس یک الگوریتم واحد تصمیم بگیرند. احتیاج به نوشتن برنامه نیست ولی لازم است که اثبات کنید که الگوریتم شما درست عمل می‌کند.

ب) ثابت کنید که مسیر توپ در بند فوق برای هر i و j یک‌تا است.

پ) فرض کنید n ($1 < n \leqslant 8$) عدد توپ در n اتاق از طبقه‌ی سوم قرار دارند و از سمت چپ به راست بر روی این توپ‌ها شماره‌های صفر تا $n-1$ نوشته شده است. اثبات کنید که اگر افراد موجود در اتاق‌ها همگی بر اساس الگوریتم بند فوق عمل کنند، توپی که بر روی آن شماره‌ی i نوشته شده است در انتها به اتاق شماره‌ی i در طبقه‌ی هم‌کف می‌رسد و در این مدت هیچ گاه بیش از یک توپ وارد یک اتاق نمی‌شود.

۴. یک ماشین حساب در اختیار داریم که دارای 4 حافظه است که با شماره‌های 1 تا 4 مشخص می‌شوند. هر یک از این حافظه‌ها می‌تواند یک عدد صحیح مثبت را در خود نگه‌داری کند (محدودیتی در مقدار این عدد وجود ندارد). این ماشین حساب می‌تواند یک برنامه را اجرا کند. هر برنامه شامل تعدادی دستور است

که به ترتیب مشخصی قرار گرفته اند. این ماشین حساب تنها سه نوع دستور را قبول می‌کند. این سه نوع دستور عبارت اند از:

- I n (n یک عدد صحیح بین 1 تا 4 است.): این دستور به مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n یکی اضافه می‌کند. پس از اجرای این دستور، ماشین دستور بعدی را اجرا می‌کند.
- D n (n یک عدد صحیح بین 1 تا 4 است.): اگر مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n مساوی‌ی صفر باشد، این دستور هیچ کاری انجام نمی‌دهد و پس از آن دستور بعدی اجرا می‌شود. ولی اگر مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n مثبت باشد، این دستور یکی از مقدار حافظه‌ی شماره‌ی n کم می کند و سپس از دستور بعدی صرف نظر کرده و دستور بعد از آن را اجرا می‌کند.
- T d (d یک عدد صحیح مثبت یا منفی است.): این دستور به تنهایی کاری انجام نمی‌دهد ولی مقدار d مشخص می‌کند که چه دستوری پس از این دستور اجرا شود. اگر d یک عدد منفی باشد، دستوری که $|d|$ تا قبل از این دستور قرار گرفته است پس از این دستور اجرا می‌شود. به هم‌این صورت اگر d یک عدد مثبت باشد، دستوری که d تا بعد از این دستور قرار گرفته است پس از این دستور اجرا می‌شود.

اجرای یک برنامه از دستور اول آن شروع می‌شود و با توجه به شرایط فوق تا وقتی که دستوری که باید اجرا شود وجود داشته باشد، ادامه می‌یابد. برای مثال این برنامه را در نظر بگیرید:

```
D 2
T 2
T -2
D 1
T 3
I 2
T -3
```

این برنامه ابتدا حافظه‌ی شماره‌ی 2 را پاک می‌کند و سپس مقدار حافظه‌ی شماره‌ی 1 را در حافظه‌ی شماره‌ی 2 ذخیره می‌کند و مقدار حافظه‌ی شماره‌ی 1 را مساوی با صفر می‌کند. اجرای این برنامه پس از اجرای دستور T 3 تمام می‌شود؛ چون دستوری که باید اجرا شود وجود ندارد.

الف) برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

```
D 1
T 6
D 1
T 3
I 2
T -5
```

```
I 3
D 2
T 5
I 1
D 2
T −11
T −3
```

اگر مقدار حافظه‌ی شماره‌ی 1 برابر 1374 و مقدار بقیه حافظه‌ها برابر با صفر باشد، پس از اجرای این برنامه این مقادیر به چه صورت خواهند بود؟

ب فرض کنید a_n تعداد اعدادی باشد که از ارقام 1 و 2 تشکیل شده اند و مجموع ارقام آن‌ها برابر با n است. برنامه‌یی برای این ماشین حساب بنویسید که مقدار a_n را محاسبه کند. مقدار n قبل از اجرای برنامه در حافظه‌ی شماره‌ی 1 قرار داده می‌شود و مقدار بقیه‌ی حافظه‌ها در ابتدا برابر با صفر است. در انتهای اجرای برنامه مقدار a_n باید در حافظه‌ی شماره‌ی 1 ذخیره شده باشد. تعداد دستورهای برنامه‌ی شما نباید از 30 بیش‌تر باشد.

پ فرض کنید b_n تعداد اعدادی باشد که از ارقام 1 و 2 و 3 تشکیل شده اند و مجموع ارقام آن‌ها برابر با n است و هم‌چنین ارقام یکان و دهگان آن‌ها هر دو هم‌زمان یک نیستند. (برای مثال $b_4 = 5$ است چون تنها عددهای 31 و 22 و 121 و 112 و 13 وجود دارند که دارای این شرایط هستند.) برنامه‌یی برای این ماشین حساب بنویسید که مقدار b_n را محاسبه کند. مقدار n قبل از اجرای برنامه در حافظه‌ی شماره‌ی 1 قرار داده می‌شود و مقدار بقیه‌ی حافظه‌ها در ابتدا برابر با صفر است. در انتهای اجرای برنامه مقدار b_n باید در حافظه‌ی شماره‌ی 1 ذخیره شده باشد.

توجه کنید که در قسمت‌های ب† و پ† باید در مورد ایده‌ی برنامه‌یی که می‌نویسید توضیح دهید.

پاسخ‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم پنجمین المپیاد

۱ ☸ مکعب‌های واحد را شترنجی رنگ کرده، پوسته را به سه جفت مکعب مستطیل $1\times n\times n$، $1\times(n-2)\times n$، و $1\times(n-2)\times(n-2)$ افراز می‌کنیم. در هر یک از این جفت‌ها هر دو مکعب مستطیل یک نقش رنگی دارند. پس برای n فرد در هر جفت شمار یکی از رنگ‌ها 2 تا بیش از دیگری است. پس در سه جفت، یکی از رنگ‌ها دست پایین 2 تا (2 یا 6 تا؛ در واقع درست 2 تا) بیش از دیگری به کار رفته است. (چه‌را؟) هر آجر $2\times1\times1$ درست یکی را از یک رنگ و دیگری را از رنگ دیگر می‌گیرد. پس، از آن رو که شمار مکعب‌های یکه از دو رنگ در پوسته یک‌سان نیست، نمی‌توان پوسته را ساخت.

بیان مساله "تنها اگر" بوده است. در واقع مساله درست بیان نشده و "اگر" را نخواسته است.•

۲

آ به سادگی واژه ساخته می‌شود.

ب ☸ کوچک‌ترین واژه‌یی را که شمار aها و bهای یک‌سان ندارد، در نظر می‌گیریم. همه‌ی واژه‌ها با درازای کم‌تر دارای شمار aها و bهای یک‌سان هستند. این واژه تهی نیست؛ پس، از یکی از گام‌های سه‌گانه به دست آمده است. ولی هیچ یک از این گام‌ها نمی‌تواند از روی واژه‌یی با شمار aها و bهای برابر چنین کارتی را به دست دهد. تناقض! به این سان درستی‌ی "تنها اگر" نشان داده شد.

استقرای قوی را به کار گرفته، نشان می‌دهیم برای هر n هر واژه‌یی را با شمار aها و bهای n می‌توان ساخت. درستی‌ی پایه‌ی $n = 0$ روشن است. گیریم همه‌ی واژه‌ها با شمار aها و bهای برابر و کم‌تر از n ساختنی باشند. پس می‌خواهیم نشان دهیم هر واژه‌ی W را با n تا a و n تا b که $n > 0$، می‌توان ساخت. اگر W به گونه‌ی $aW'b$ یا $bW'a$ باشد، از آن جایی که W' شمار کم‌تری a و b دارد، ساختنی است و W از روی آن با گام دوم یا سوم ساخته می‌شود. گیریم W به گونه‌ی $aW'a$ باشد. پس نشان می‌دهیم می‌توان آن را به گونه‌ی W_1W_2 نوشت که W_1 و W_2 واژه‌هایی ناتهی با شمار یک‌سانی a و b هستند. s_i را شمار aها منهای شمار bها در i نویسه‌ی نخست W می‌گیریم. داریم $s_1 = 1$ و $s_{n-1} = -1$. تابع s_i از i با هر تغییر واحد i، یک واحد تغییر می‌کند. پس در رسیدن از $s_1 = 1$ به $s_{n-1} = -1$ باید

از 0 بگذرد. پس می‌گیریم $s_m = 0$. m نویسه‌ی آغازی W_1 و نویسه‌های پس از آن W_2 را به دست می‌دهند. W_1 و W_2 بر پایه‌ی فرض استقرا ساختنی هستند. از این رو W از روی آن به کمک گام یکم ساخته می‌شود. اگر W به گونه‌ی $bW'b$ باشد نیز با استدلالی به هم‌این گونه ساخته شدنی است. پس درستی‌ی "اگر" نیز نشان داده شد.

ا در طبقه‌ی fم می‌توان توپ را 2^{3-f} اتاق جابه‌جا کرد. به این سان می‌توان رقم 2^{3-f}گان پایه‌ی 2ی شماره‌ی اطاق را در طبقه‌ی fم تغییر داد. توپ i در اتاق r طبقه‌ی f است. این توپ باید به اتاق j برود. به روشنی اگر رقم $4 - f$م پایه‌ی 2ی r و j یک‌سان بودند، توپ راست به پایین می‌رود. اگر این دو رقم یک‌سان نبودند، این رقم را باید تغییر داد تا سرانجام شماره‌ی اتاق توپ برابر j گردد، پس توپ کج به پایین می‌رود. در پایان تک تک رقم‌های پایه‌ی 2ی شماره‌ی اتاق توپ که در آغاز i بوده است، با رقم‌های j یک‌سان می‌گردند و از این رو توپ به اتاق j می‌رسد.

ب در طبقه‌ی fم تنها می‌توان رقم $4 - f$م پایه‌ی 2ی شماره‌ی اتاق را تغییر داد. رقم $4 - f$م را نیز تنها در طبقه‌ی fم می‌توان تغییر داد. به این سان مسیر به صورت یک‌تا با توجه به i و j تعیین می‌شود.

پ توپ‌های a و b که در آغاز در اتاق‌های r_a و r_b بوده اند، در اتاق r طبقه‌ی f به هم رسیده اند. می‌دانیم رقم‌های 1م تا $3 - f$م a و b باید یک‌سان باشند. پس، از آن رو که داریم $a \neq b$، a و b اختلاف دست پایین 2^{3-f} را با هم دارند: $|a - b| \geqslant 2^{3-f}$. به روشنی r_a و r_b در رقم‌های پس از $3 - f$ یک‌سان هستند و از این رو داریم $|r_a - r_b| < 2^{3-f}$. به این سان باید داشت $|r_a - r_b| < |a - b|$ که تناقض است، چون r_a و r_b اختلاف دست پایین $|a - b|$ را دارند.

۲

ا برنامه در هر گام مقدار حافظه‌ی 1 را بر 2 تقسیم کرده، اگر مانده‌ی تقسیم 1 بود، یکی به مقدار حافظه‌ی 3 می‌افزاید. به این سان برنامه شمار 1های پایه‌ی 2ی مقدار حافظه‌ی 1 را در حافظه‌ی 3 می‌شمارد. پس در پایان مقدارهای حافظه‌ها به ترتیب 0، 0، 7، 0 خواهند بود.

ب از a_n عدد با مجموع رقم‌های n به روشنی a_{n-1} تاشان با 1 و a_{n-2} تاشان با 2 آغاز می‌گردند. پس داریم $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. هم‌چنین داریم $a_0 = a_1 = 1$. a_{-1} را برابر با 0 و مقدارهای آغازین حافظه‌های 2 و 3 را به ترتیب 0 و 1 می‌گیریم. پس در پایان تکرار حلقه‌ی اصلی، برنامه در این دو حافظه a_{n-1} و a_n را به دست داده، پس از آن مقدار حافظه‌ی 3 را به حافظه‌ی 1 می‌ریزد.

1. I 3
2. D 1
3. T 15

4. D 2
5. T 3
6. I 4
7. T −3
8. D 3
9. T 4
10. I 2
11. I 4
12. T −4
13. D 4
14. T 3
15. I 3
16. T −3
17. T −15
18. D 3
19. T 3
20. I 1
21. T −3

پ به شیوه‌یی همانند قسمت پیش بازگشت $b_n = b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}$ را با اندازه‌های کرانه‌یی‌ی $b_0 = b_1 = b_2 = 1$ می‌یابیم. نکته‌ی مهم بازگشت با این اندازه‌های کرانه‌یی، فرد بودن همه‌ی جمله‌های دنباله است. پس b_0، b_1، و b_2 را 2^n برابر کرده، در هر اجرای حلقه آن‌ها را $1/2$ برابر می کنیم. به این سان به حافظه‌یی برای نگاه داشتن n نیاز نیست و حلقه تا فرد شدن جمله‌های به دست آمده تکرار می‌شود.

1. I 4
2. T 4
3. T 11
4. D 4
5. T 4
6. I 3
7. I 3
8. T −4
9. D 3
10. T 3
11. I 4

12. T −3
13. T −11
14. D 4
15. T 5
16. I 1
17. I 2
18. I 3
19. T −5
20. D 3
21. T 5
22. D 3
23. T −23
24. I 4
25. T −5
26. D 1
27. T −1
28. D 1
29. T 3
30. I 3
31. T −5
32. D 2
33. T −1
34. D 2
35. T 4
36. I 1
37. I 3
38. T −6
39. D 4
40. T 4
41. I 2
42. I 3
43. T −4
44. T −24

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم پنجمین المپیاد

۵ (۵۴) یک سفینه‌ی فضایی می‌خواهد پیام‌هایی را به زمین ارسال کند. دستگاه فرستنده‌ی این سفینه قادر است در هر مرحله یک کلمه به زمین بفرستد. هر کلمه یک دنباله به طول n از صفر و یک است. بنا بر این با استفاده از این فرستنده می‌توان هر پیغام را به صورت دنباله‌یی از کلمه‌ها به زمین ارسال کرد. به دلیل طولانی بودن مسیری که پیام باید طی کند تا به زمین برسد، در بین راه ممکن است در هر کلمه حد اکثر یکی از صفرها تبدیل به یک و یا حد اکثر یکی از یک‌ها تبدیل به صفر شود. هدف ما در این مساله این است که برای فرستادن پیام‌ها تنها از بعضی کلمات خاص استفاده کنیم، به طوری که پس از رسیدن پیام به زمین خطاها قابل تشخیص و رفع کردن باشند. برای مثال اگر $n = 6$ باشد، می‌توانیم از 4 کلمه‌ی 000000، 111000، 000111، 111111 استفاده کنیم. در این صورت اگر برای مثال کلمه‌ی 110111 به زمین برسد، می‌توانیم تشخیص دهیم که کلمه‌ی درست 111111، و نه کلمه‌یی دیگر از کلمات فوق، بوده است که در اثر خطا به 110111 تبدیل شده است.

الف ثابت کنید شرط لازم و کافی برای این که عمل تشخیص و رفع کردن خطا ممکن باشد این است که هر دو کلمه‌یی که از آن‌ها استفاده می‌کنیم لا اقل در سه محل با هم اختلاف داشته باشند.

ب ثابت کنید که اگر $n = 20$ باشد، برای این که خطاها قابل تشخیص و رفع باشند، نمی‌توانیم بیش‌تر از 50000 کلمه در دستگاه داشته باشیم.

۶ (۵۵) یک اداره از n بخش تشکیل شده است که هر بخش دارای یک نفر با عنوان مدیر بخش است. مدیر هر یک از این بخش‌ها n نفر کارمند را تحت نظر دارد. هر یک از این افراد تنها در یکی از این بخش‌ها کار می‌کنند. (بنا بر این هر یک از کارمندان تنها تحت نظر یک مدیر است.)

می‌خواهیم برای هر یک از افرادی که در این اداره کار می‌کنند (یعنی مدیران بخش‌ها و کارمندان) یک دفتر کار اختصاص دهیم به طوری که شرایط زیر برقرار باشند:

- هر یک از این افراد یک دفتر داشته باشد. البته هر یک از دفترها می‌تواند هر تعداد از این افراد را در خود جای دهد.

- هیچ دو مدیری نباید با هم در یک دفتر قرار بگیرند.
- دفتر مدیر هیچ یک از بخش‌ها نباید با دفتر هیچ یک از کارمندان هم‌آن بخش یکی باشد.
- هر یک از مدیران باید با یک خط تلفن اختصاصی با هر یک از کارمندان زیر نظرش در ارتباط باشد. منظور از یک خط تلفن اختصاصی بین مدیر a و کارمند b، خط تلفنی است که بین دفتر کار این دو کشیده شده است و از طریق آن تنها این دو نفر می‌توانند با هم صحبت کنند و هیچ کدام از سایر کارمندان و مدیران نباید از این خط استفاده کنند.
- بین هر دو دفتر کار حد اکثر یک خط تلفن می‌توان کشید.

ثابت کنید که حد اقل تعداد دفترهای لازم برای جا دادن این افراد به طوری که شرایط فوق برقرار شوند برابر است با $[3n/2] + 1$. (منظور از $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی با x است.)

۷ در جمعی n نفر حضور دارند. بعضی از این افراد هم‌دیگر را می‌شناسند. فرض کنید که آشنایی یک رابطه‌ی دوطرفه است؛ یعنی اگر a، b را بشناسد، b نیز a را می‌شناسد. فرض کنید که هر نفر در این جمع حد اکثر با d نفر دیگر آشنا است.

اگر $d = k + l + 1$ باشد، می‌خواهیم این افراد را به دو گروه A و B تقسیم کنیم به طوری که هر یک از اعضای گروه A حد اکثر k نفر از دیگر اعضای این گروه را بشناسد و هر یک از اعضای گروه B هم با حد اکثر l نفر از دیگر اعضای این گروه آشنا باشد. برای این منظور الگوریتم زیر پیش‌نهاد شده است:

ابتدا یک گروه‌بندی دل‌خواه (A, B) را در نظر می‌گیریم. سپس در هر مرحله این کار را انجام می‌دهیم: اگر گروه‌بندی (A, B) دارای شرایط مساله بود، کار تمام شده است. در غیر این صورت یا یک نفر در A وجود دارد که با بیش از k نفر از اعضای گروهش آشنا باشد و یا یک نفر در گروه B وجود دارد که با بیش از l نفر از اعضای گروهش آشنا باشد. در هر یک از این دو حالت فرد مزبور را به گروه دیگر منتقل می‌کنیم.

ثابت کنید که این الگوریتم هم‌واره به جواب می‌رسد.

۸ برنامه‌یی به نام Prog موجود است که کلیه‌ی مسایل از نوع A را حل می‌کند:

مساله‌ی نوع A. فردی قرار است n کار با شماره‌های 1 تا n را با شرایط زیر انجام دهد. او در هر زمان حد اکثر یک کار را می‌تواند انجام دهد و کار در دست اجرا را باید تا آخر ادامه دهد. هر کار i با سه عدد صحیح s_i، d_i و l_i مشخص می‌شود ($0 < s_i \leqslant d_i - l_i$). انجام کار i l_i واحد زمان طول می‌کشد. کار i نباید زودتر از زمان s_i شروع شده و نباید بعد از زمان d_i ختم شود. هدف از این مساله این است که بدانیم آیا این فرد می‌تواند کلیه‌ی این کارها را با شرایط داده شده انجام دهد یا خیر.

ورودی. n و برای $i = 1, \ldots, n$ سه عدد صحیح s_i، d_i و l_i.

خروجی. بله (می‌تواند) یا خیر (نمی‌تواند).

حال می‌خواهیم با استفاده از Prog مساله‌ی زیر را نیز حل کنیم:

مساله‌ی نوع B. مجموعه‌ی P شامل m عدد صحیح مثبت داده شده است. فرض کنید مجموع این اعداد زوج است. آیا می‌توان P را به دو مجموعه‌ی P_1 و P_2 افراز کرد به طوری که مجموع اعداد موجود در P_1 با مجموع اعداد موجود در P_2 برابر باشد؟

ورودی. m تا عدد صحیح مثبت که مجموع آن‌ها زوج است.

خروجی. بله یا خیر (نحوه‌ی افراز P مهم نیست.)

نشان دهید که می‌توان ورودی‌ی هر مساله از نوع B را به ورودی‌ی یک مساله از نوع A تبدیل کرد و سپس آن را با برنامه‌ی Prog اجرا نمود به طوری که نتیجه‌ی اجرای Prog هم‌آن نتیجه‌ی حل مساله‌ی نوع B باشد. این تبدیل را به دقت توضیح دهید (احتیاج به نوشتن الگوریتم یا برنامه نیست) و نشان دهید که راه حل شما برای کلیه‌ی مسایل نوع B درست است. (بدیهی است که حل مستقیم مساله‌ی B مورد نظر نیست.)

پاسخ‌های نوبت دوم
مرحله‌ی دوم پنجمین المپیاد

۵

الف گیریم دو واژه‌ی W_1 و W_2 در دست بالا 2 نویسه با هم تفاوت داشته باشند و W' با تغییر یکی از این نویسه‌ها در W_1 به دست آمده باشد. با دریافت W' نمی‌توان دریافت W_1 فرستاده شده است یا W_2. گیریم هر دو واژه در دست پایین 3 نویسه گوناگون باشند. پس هر واژه‌ی دریافتی با واژه‌ی فرستاده شده دست بالا 1 و با واژه‌های دیگر دست پایین 2 گوناگونی دارد. به این ترتیب تشخیص دادنی است.

ب هر دو واژه‌یی را که در یک جا گوناگون باشند، هم‌آورد می‌نامیم. هر واژه‌ی n نویسه‌یی n هم‌آورد دارد. هیچ دو واژه‌یی که در دست پایین سه جا گوناگون باشند، هم‌آورد مشترک ندارند. با گزینش هر واژه، هم‌آوردهای آن واژها را دیگر نمی‌توان به کار برد. پس برای هر واژه دست پایین n واژه‌ی دیگر از 2^n واژه‌ی ممکن، دیگر به کار نمی‌آید. به این سان دست بالا $\lfloor 2^n/(n+1)\rfloor$ واژه را می‌توان برگزید.

۶ هر یک از مدیران را در یک اتاق جای می‌دهیم: تا کنون n اتاق. هیچ دو کارمندی از یک بخش نمی‌توانند در یک اتاق باشند. (چه‌را؟) پس در اتاق هر مدیر دست بالا $n-1$ کارمند می‌توان جای داد: روی هم $n(n-1)$ کارمند. اگر کارمند بخش p در اتاق مدیر بخش q باشد، هیچ کارمندی از بخش q نمی تواند در اتاق مدیر بخش p باشد. (چه‌را؟) از این رو نیمی از ظرفیت پیشین از دست می‌رود و دست بالا $n(n-1)/2$ کارمند را می‌توان در اتاق‌های مدیران جای داد. شمار کارمندان مانده $n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2$ است. هر اتاق جدید می‌تواند دست بالا n کارمند را در خود جای دهد. (چه‌را؟) پس دست پایین $(n+1)/2$ اتاق دیگر می‌خواهیم. به این سان شمار اتاق‌های مورد نیاز دست پایین $n + \lceil (n+1)/2 \rceil$ است. از سویی دیگر برابری‌ی $\lceil (3n+1)/2 \rceil = \lfloor (3n+2)/2 \rfloor$ را نیز داریم. (چه‌را؟)

۷ شمار جفت‌های آشنا را در A و B به ترتیب a و b می‌گیریم. هم‌چنین تعریف می‌کنیم $M = la + kb$. با بردن یک تن از A به B، دست پایین $k+1$ تا از a کاسته و دست بالا l تا به b افزوده می‌شود. به این سان M دست پایین l تا کاهش می‌یابد. بردن یک تن از B به A نیز دست پایین k کاهش را برای M به دست می‌دهد. پس، از آن رو که M نامنفی است، این کاهش‌ها سرانجام پایان خواهند یافت.

۸ ♦ عضوهای P را p_1، p_2، $\dots$، p_m و مجموع آن‌ها را $2S$ گرفته، ورودی‌ها را به گونه‌ی زیر به A می‌دهیم.

$$n = m$$

$$s_i = \begin{cases} 1 & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ S+1 & i = m \end{cases}$$

$$d_i = \begin{cases} 2S+1 & i = 1, 2, \dots, m-1 \\ S+1+p_i & i = m \end{cases}$$

$$l_i = p_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

کار m باید درست پس از گذشت زمان S آغاز گردد. پس کار جداساز را انجام می‌دهد.

ششمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم صبح ۱۳۷۵/۴/۹، و نوبت دوم عصر ۱۳۷۵/۴/۱۱ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۴٫۵، و برای آزمون نوبت دوم ۴٫۵ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ با نام "رشته‌ها" دارای 10، مساله‌ی ۲ با نام "دو مجموعه" دارای 10، مساله‌ی ۳ با نام "بازی" دارای 15، مساله‌ی ۴ با نام "المپیادها" دارای 15، مساله‌ی ۵ با نام "جای‌گشت منتظم" دارای 10، مساله‌ی ۶ با نام "رشته‌ی موزون" دارای 10، مساله‌ی ۷ با نام "زیرمجموعه‌ها" دارای 15، و مساله‌ی ۸ با نام "پلیس و شاهدان" دارای 15 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم ششمین المپیاد

۱ ۵۸ یک رشته، یک دنباله‌ی متناهی از صفر و یک است. A یک مجموعه‌ی متناهی از رشته‌ها است که برای هر دو رشته‌ی دل‌خواه α و β از آن داریم $\alpha\beta = \beta\alpha$. (منظور از $\alpha\beta$ رشته‌یی است که از کنار هم گذاشتن دو رشته‌ی α و β به دست می‌آید. برای مثال اگر $\alpha = 011$ و $\beta = 10$ باشد، آن گاه $\alpha\beta = 01110$ خواهد بود.)

ثابت کنید که رشته‌یی مانند ω وجود دارد که هر رشته‌ی دل‌خواه A را می‌توان از کنار هم گذاشتن تعدادی ω به دست آورد.

۲ ۵۹ A و B دو مجموعه‌ی متناهی و جدا از هم از عددهای صحیح هستند به طوری که برای هر $x \in A \cup B$، یا $x + 1 \in A$ و یا $x - 2 \in B$ است.

ثابت کنید که تعداد عناصر مجموعه‌ی A دو برابر تعداد عناصر مجموعه‌ی B است.

۳ ۶۰ یک دسته‌ی nتایی، سنگ‌ریزه موجود است. دو بازی‌کن بازی‌ی زیر را روی این سنگ‌ریزه‌ها انجام می‌دهند: در هر نوبت بازی‌کنی که نوبت حرکت با او است، یکی از دسته‌ها را انتخاب و آن را به طور دل‌خواه به دو دسته‌ی غیرتهی تقسیم می‌کند. بازی‌کنی که نتواند حرکتی انجام دهد، بازنده‌ی بازی است.

الف تمام nهایی را به دست آورید که برای آن‌ها نفر دوم بتواند طوری بازی کند که همیشه برنده شود. ادعای خود را اثبات کنید.

ب شرط بازی را به این صورت تغییر می‌دهیم که در هر نوبت، بازی‌کن باید طوری یک دسته را به دو دسته‌ی غیرتهی تقسیم کند که حد اقل یکی از این دو دسته، تعداد زوجی سنگ‌ریزه داشته باشد. در این صورت هم تمام nهایی را به دست آورید که برای آن‌ها نفر دوم بتواند طوری بازی کند که همیشه برنده شود. ادعای خود را اثبات کنید.

۴ ۶۲ فرض کنید که n دانش‌آموز و n المپیاد داریم و قرار است در هر المپیاد یک دانش‌آموز پذیرفته شود. تمام دانش‌آموزان در تمام المپیادها شرکت می‌کنند و هیچ دو دانش‌آموزی در یک المپیاد نمره‌ی مساوی نمی‌گیرند.

هر دانش‌آموز یک فهرست اولویت nتایی برای n المپیاد (یعنی یک جای‌گشت از n المپیاد) پر می‌کند و علاقه‌مندی خود را به ترتیب مشخص می‌کند.

یک گزینش پای‌دار را به این صورت تعریف می کنیم که هر دانش‌آموز در یک المپیاد انتخاب شده باشد و هیچ دو زوج (دانش‌آموز,المپیاد) مانند (O, S) و (O', S') وجود نداشته باشد به قسمی که دانش‌آموز S در المپیاد O' نمره‌یی بیش‌تر از دانش‌آموز S' در المپیاد O' داشته باشد و نیز علاقه‌اش به المپیاد O' بیش‌تر از علاقه‌اش به المپیاد O باشد.

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید:

۰. در ابتدا، هیچ دانش‌آموزی در هیچ المپیادی رد نشده است.

۱. هر یک از دانش آموزان با توجه به فهرست اولویت خود، اولین المپیادی را انتخاب می‌کند که در آن رد نشده باشد و برای آن درخواست می‌دهد. در صورتی که چنین المپیادی وجود نداشته باشد، کار پایان می‌یابد.

۲. در هر کدام از المپیادها، از میان دانش‌آموزان درخواست دهنده برای آن المپیاد، دانش‌آموزی که در آن المپیاد نمره‌ی بالاتری آورده باشد پذیرفته می‌شود و سایر دانش‌آموزان درخواست دهنده، در صورت وجود، در آن المپیاد رد می‌شوند.

۳. اگر در هر المپیاد یک دانش‌آموز پذیرفته شده باشد، الگوریتم پایان می‌یابد. در غیر این صورت، دوباره به مرحله‌ی ۱ برمی‌گردیم.

الف) ثابت کنید که الگوریتم فوق وقتی پایان می‌یابد که در هر المپیاد یک دانش‌آموز پذیرفته شده باشد.

ب) ثابت کنید که وقتی الگوریتم فوق پایان می‌یابد، یک گزینش پای‌دار به دست آمده است.

پاسخ‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم ششمین المپیاد

۱ عمل $\ominus$ را روی رشته‌ها به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha\beta \ominus \beta = \beta \ominus \alpha\beta = \alpha.$$

اگر از دو رشته یکی در پایان دیگری نباشد، حاصل $\ominus$ تعریف نشده خواهد بود. درازای رشته‌ی α را نیز با $|\alpha|$ نمایانده، مجموعه را با ویژگی گفته شده‌ی $\alpha\beta = \beta\alpha$، دسته‌ی ویژه می‌نامیم. نشان می‌دهیم اگر S یک دسته‌ی ویژه باشد و $\sigma_1, \sigma_2 \in S$، مجموعه‌ی $S' = S \cup \{\sigma_1 \ominus \sigma_2\}$ نیز دسته‌یی ویژه است. گیریم $|\sigma_1| > |\sigma_2|$. از آن رو که $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$، σ_1 در پایان خود σ_2 را دارد و $\sigma_1 \ominus \sigma_2$ تعریف شده است. گیریم $\sigma = \sigma_1 \ominus \sigma_2$. باید نشان دهیم برای هر σ' که $\sigma' \in S'$، داریم $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$. حالت $\sigma = \sigma'$ روشن است. پس می‌انگاریم $\sigma' \neq \sigma$.

$$\sigma',_1 \sigma \in S \Rightarrow \sigma'\sigma_1 = \sigma_1\sigma' \Rightarrow \sigma'\sigma\sigma_2 = \sigma\sigma_2\sigma'$$

$$\sigma', \sigma_2 \in S \Rightarrow \sigma'\sigma_2 = \sigma_2\sigma'$$

$$\therefore\ \sigma'\sigma\sigma_2 = \sigma\sigma'\sigma_2 \Rightarrow \sigma'\sigma = \sigma\sigma'$$

با $|\sigma_1| = |\sigma_2|$ نیز به روشنی S' ویژه است. برای دسته‌ی ویژه‌ی S، پوش S^e را به گونه‌ی زیر تعریف می‌کنیم.

$$S^e = S \cup \{\sigma_1 \ominus \sigma_2 \mid \sigma_1, \sigma_2 \in S\}$$

از آن جا که S متناهی است، S^e نیز متناهی می‌باشد. (چه‌را؟) پس، از آن چه گفتیم برمی‌آید که S^e نیز ویژه است. پوش دسته‌ی ویژه‌ی S و به هم‌این سان پوش مجموعه‌ی به دست آمده را می‌گیریم تا به مجموعه‌ی S^m برسیم به گونه‌یی که $S^{m^e} = S^m$. (چه‌را این گام‌ها به دسته‌ی ویژه‌ی پای‌دار S^m می‌رسند؟) S^m را فراپوش S می‌نامیم:

$$S^m = S^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}, \quad S^{m^e} = S^m.$$

روشن است که فراپوش یک دسته‌ی ویژه، خود، نیز دسته‌یی ویژه است. هم‌چنین اگر S ویژه باشد، نمی‌توان

...سته‌ی σ_1 و σ_2 را در آن یافت که $\sigma_1 \neq \sigma_2$ و $|\sigma_2| = |\sigma_1|$:

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in S; \quad \sigma_1 = \sigma_2 \iff |\sigma_1| = |\sigma_2|.$$

... دسته‌ی A^m، فراویژه‌ی A، را می‌سازیم. کوتاه‌ترین رشته‌ی ناتهی A^m را ω می‌گیریم. ω هم‌آن رشته‌ی ...دی خواسته شده است. چه‌را؟ روشن است که اگر هر رشته در A^m از کنار هم نهادن شماری ω ساخته ... همه‌ی رشته‌های A نیز چنین خواهند بود. پس نشان می‌دهیم ω رشته‌ی سازنده‌ی A^m است. درازای ...ی رشته‌های A^m مضربی از $|\omega|$ است. چه‌را؟

... کوچک‌ترین رشته‌یی را که این گونه نیست، در نظر می‌گیریم. به روشنی وجود این رشته با ویژگی‌ی فراپوشی‌ی ...، $A^m = A^{m'}$، تناقض دارد. (چه‌را؟) استقرا را روی درازای رشته‌ها به کار می‌گیریم. گیریم $n = |\sigma|$. از آن ...ی که $\omega\sigma = \sigma\omega$، می‌توان σ را به گونه‌ی $\sigma = \sigma_p\omega$ نوشت. داریم $\sigma_p = \sigma - \omega \in S$ و $|\sigma_p| < n$. ... با توجه به فرض استقرای قوی σ_p از شماری ωی کنار هم به دست آمده است. پایه نیز برای رشته‌ی تهی ...ار می‌باشد.

... بیان مساله اشکالی منطقی دارد. در واقع یای انحصاری‌ی به کار رفته می‌بایست به گونه‌ی "یا ... $x+1 \in$ ...، x، یا $x - 2 \in B$" بیان شود.• استقرا را روی $n = \#B$ به کار می‌گیریم. برای $n = 0$ داریم $B = \emptyset$ ...اید نشان دهیم $A = \emptyset$. در واقع اگر $a \in A$، آن گاه داریم $a \in A \cup B$ و سپس $a + 1 \in A$. به این سان A ...متناهی خواهد بود. (چه‌را؟) گیریم $n > 0$. B متناهی است؛ پس می‌گیریم $b = \min B$. داریم $b \in A \cup B$ و ...ن b کوچک‌ترین عضو B است، $b - 2 \notin B$ و از این رو $b + 1 \in A$. به هم‌این شیوه $b + 2 \in A$. (چه‌را؟) ... این سان مجموعه‌های $A \setminus \{b+1, b+2\}$ و $B \setminus \{b\}$ ویژگی‌های گفته شده را دارند. (چه‌را؟) پس بر پایه ...ض استقرا برای $n - 1$ داریم $\#(A \setminus \{b+1, b+2\}) = 2\#(B \setminus \{b\})$.

ا ... در هر گام یکی به شمار دسته‌ها افزوده می‌شود. در آغاز 1 دسته و در پایان n دسته داریم. پس بازی $n - 1$ گام به درازا می‌انجامد. بازی‌کن دوم می‌برد اگر و تنها اگر n فرد باشد: $n \equiv 1 \pmod 2$.

ب ... اگر داشته باشیم $n = 2$، همه‌ی دسته‌ها تا پایان بازی زوج خواهند ماند. از این رو در پایان m دسته‌ی دوتایی خواهیم داشت. اگر هم $n = 2m - 1$، شمار دسته‌های فرد هم‌واره 1 می‌ماند و در پایان $m - 1$ دسته‌ی دوتایی و 1 دسته‌ی یک‌تایی خواهیم داشت. به این سان در هر دو صورت بازی $m - 1$ گام به درازا می‌انجامد. پس بازی‌کن دوم برنده است اگر و تنها اگر $\lfloor n/2 \rfloor$ فرد باشد: $n \equiv 1, 2 \pmod 4$.

... بیان شرط پایانی‌ی گام ۱ را این گونه تصحیح می‌کنیم:

"در صورتی که چنین المپیادی برای یکی از دانش‌آموزان وجود نداشته باشد، الگوریتم پایان می‌یابد.".•

ا اگر در المپیادی یک نفر پذیرفته شود، تا پایان الگوریتم آن المپیاد یک پذیرفته شده خواهد داشت. (چه‌را؟) اگر هم فردی در یک المپیاد رد شود آن المپیاد یک پذیرفته شده داشته است. هم‌چنین روشن است که هیچ فردی در یک زمان در بیش از یک المپیاد پذیرفته نشده است.

باید نشان دهیم الگوریتم هیچ گاه از گام ۱ پایان نمی‌یابد. گیریم این گونه نباشد و دانش‌آموز S در همه‌ی المپیادها رد شده باشد. آخرین گامی را که درخواست S رد شده است، در نظر می‌گیریم. چون S در همه‌ی المپیادها رد شده است، باید برای همه‌ی المپیادها پذیرفته شده داشته باشیم. اما بر پایه‌ی اصل دیریکله باید یکی از افراد در دو المپیاد پذیرفته شده باشد که شدنی نیست.

ب نمره‌ی ویژه‌ی هر المپیاد را نمره‌ی فرد پذیرفته شده در آن المپیاد می‌گیریم. نمره‌ی افراد را نامنفی انگاشته، در آغاز که فردی برای المپیادی پذیرفته نشده است، نمره‌ی ویژه‌ی هر المپیاد را $1-$ می‌انگاریم. روشن است که اگر فردی در المپیادی رد شود، نمره‌ی او از نمره‌ی ویژه‌ی آن المپیاد کم‌تر بوده است. نمره‌ی ویژه‌ی المپیاد هم هیچ گاه کاهش نمی‌یابد. در واقع نمره‌ی ویژه‌ی هر المپیاد با پذیرفته شدن یک نفر در آن المپیاد افزایش می‌یابد. اگر علاقه‌ی S که در O پذیرفته شده است، به O' بیش از علاقه‌ی او به O باشد، می‌بایست در O' رد شده باشد، پس در هنگام رد شدن، نمره‌ی او در O' کم‌تر از نمره‌ی ویژه‌ی O' بوده و تا پایان نیز کم‌تر مانده است. از این رو S' که در O' پذیرفته شده است، نمره‌یی بیش از او دارد.

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم ششمین المپیاد

۵ / ۶۴ جای‌گشت π از مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,n\}$ را منتظم می‌نامیم اگر برای هر i $(1 \leqslant i \leqslant n)$، مقدار $|\pi(i) - i|$ ثابت باشد. تعداد جای‌گشت‌های منتظم را به ازای $n = 1996$ پیدا کنید.

$\pi(i)$ عددی است که در جای iام جای‌گشت قرار گرفته است. به عنوان مثال، اگر جای‌گشت $\pi = \langle 3,1,2,4 \rangle$ برای مجموعه‌ی $\{1,2,3,4\}$ را در نظر بگیریم، آن گاه $\pi(1) = 3$، $\pi(2) = 1$، $\pi(3) = 2$، و $\pi(4) = 4$.

۶ / ۶۵ یک رشته‌ی موزون را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. x یک رشته‌ی موزون است.

۲. اگر A و B دو رشته‌ی موزون باشند، (AB) هم یک رشته‌ی موزون است.

برای مثال، با تعریف فوق $((xx)x)$ و $(((x(xx))(xx))(x(xx)))$ دو رشته‌ی موزون هستند.

ا در یک رشته‌ی موزون به هر x عددی به نام عمق آن نسبت می‌دهیم. عمق یک x تعداد جفت پرانتزهای باز و بسته‌ی متناظر هم است که در دو طرف آن x قرار دارند. به عنوان مثال، عمق هر x در رشته‌های موزون فوق به صورت زیر است:

$$((\overset{2}{x}\overset{2}{x})\overset{1}{x}),\ (((\overset{3}{x}(\overset{4}{x}\overset{4}{x}))(\overset{3}{x}\overset{3}{x}))(\overset{2}{x}(\overset{3}{x}\overset{3}{x})))$$

عمق یک رشته‌ی موزون را بیش‌ترین عمق xها در آن رشته تعریف می‌کنیم. بنا بر این عمق دو رشته‌ی موزون فوق به ترتیب 2 و 4 است. کم‌ترین عمق هر رشته‌ی موزون با n تا x را بر حسب n به دست آورید.

ب یک رشته‌ی موزون خلاصه شده یک رشته‌ی موزون است که نویسه‌های) از آن حذف شده اند. به عنوان مثال $((xxx$ و $(((x(xx(xx(x(xx$ رشته‌های موزون خلاصه شده‌ی دو رشته‌ی موزون فوق هستند. نشان دهید که از یک رشته‌ی موزون خلاصه شده می‌توان رشته‌ی موزون اولیه را به دست آورد.

۷ ثابت کنید که می‌توان 1375 زیرمجموعه‌ی 4عضوی از مجموعه‌ی $\{1,2,\ldots,100\}$ پیدا کرد که هیچ دو تایی از آن‌ها با هم بیش از 2 اشتراک نداشته باشند. (یعنی هر 2 زیرمجموعه از بین 1375 زیرمجموعه‌ی فوق با هم حد اکثر 2 عضو مشترک داشته باشند.)
۸۷

۸ در جریان یک سرقت از یک شعبه‌ی بانک، سارقان از دو راه متفاوت از یازده راهی که به بانک ختم می‌شد گریختند. بعد از این سرقت پلیس برای شناسایی دو مسیری که دزدها از طریق آن‌ها فرار کرده بودند، شروع به جمع‌آوری اطلاعات از شاهدان حادثه کرد و برای تشویق شاهدان به گزارش دادن، برای هر شاهدی که یکی از دو مسیر را درست گزارش کرده باشد، یک جایزه و برای هر شاهدی که هر دو مسیر را درست نشان دهد، دو جایزه تعیین کرد. به هم‌این دلیل، برخی از شاهدان سرقت، حتا اگر فقط یکی از راه فرار دزدان را دیده بودند، به امید دریافت جایزه‌ی دوم، مسیر دیگری را نیز به صورت تصادفی گزارش می‌دادند. البته ممکن است برخی از شاهدان فقط یک مسیر را گزارش کنند. به هر حال، هر شاهد حد اقل یک مسیر فرار را به درستی گزارش می‌کند.
۸۸

الف پلیس حد اقل چند گزارش متفاوت باید دریافت کند تا مطمئن باشد که می‌تواند دو مسیر را به درستی شناسایی کند؟ توضیح دهید.

ب پلیس با حد اقل چند گزارش از گزارش‌هایی که دریافت کرده است می‌تواند مسیر فرار دزدان را برای دادگاه اثبات کند؟ توضیح دهید.

پاسخ‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم ششمین المپیاد

۵ ♦ اندازه‌ی ثابت $|\pi(i)-i|$ را c می‌گیریم. آشکارا $c=0$ یکی از پاسخ‌ها است. گیریم $c \neq 0$. آغاز به ساختن دنباله می‌کنیم. داریم $\pi(i)=i\pm c$. گیریم $1 \leqslant i \leqslant c$ پس $i-c \leqslant 0$ و از این رو $\pi(i)=i+c$. اکنون می‌خواهیم $\pi(j)$ را به گونه‌یی بیابیم که $\pi(j)=i$. از آن جایی که $j \pm c = i$، داریم $j=i\pm c$. به روشنی $j=i+c$. پس داریم $\pi(i+c)=i$.

i	1	2	3	$\cdots$	c	$c+1$	$c+2$	$c+3$	$\cdots$	$2c$
$\pi(i)$	$c+1$	$c+2$	$c+3$	$\cdots$	$2c$	1	2	3	$\cdots$	c

هم‌این استدلال به سادگی پر شدن را پیش می‌برد. برای نمونه در ادامه جدول زیر را داریم.

i	$2c+1$	$2c+2$	$\cdots$	$3c$	$3c+1$	$\cdots$	$4c$
$\pi(i)$	$3c+1$	$3c+2$	$\cdots$	$4c$	$2c+1$	$\cdots$	$3c$

به این ترتیب روشن است که باید داشت $2c \backslash 1996$. پس داریم $c \backslash 998 = 2 \cdot 499$. به این سان پاسخ‌های $c=1,2,499,998$ به دست می‌آیند. از این رو 5 جای‌گشت منتظم برای $n=1996$ هست.

۶

الف ♦ D_n را کمینه‌ی ژرفای رشته‌ها با n تا x گرفته، با به‌کارگیری‌ی استقرای قوی نشان می‌دهیم $D_n=\lceil \lg n \rceil$. درستی‌ی پایه‌ی $n=1$ آشکار است. اگر $n>1$، رشته‌ی موزون بر پایه‌ی تعریف از دو تکه‌ی mتایی و $n-m$تایی که $1 \leqslant m \leqslant n-1$، درست شده است. از این رو بازگشت

$$D_n = \min\{\max\{D_m, D_{n-m}\}_{m=1}^{n-1}\} + 1$$

را داریم. بر پایه‌ی فرض استقرا برای همه‌ی mهای کوچک‌تر از n داریم $D_m=\lceil \lg m \rceil$. پس D_m تابعی ناکاهشی از m است و برای کمینه نمودن $\max\{D_m, D_{n-m}\}$ باید کم‌ترین اختلاف را میان m و $n-m$ داشت: $\{m, n-m\} = \{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil\}$. به این سان D_m را می‌توان به دست آورد:

$$D_n = \left\lceil \lg n \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\rceil + 1 = \left\lceil \lg \frac{n}{2} + 1 \right\rceil = \lceil \lg n \rceil.$$

ب استقرا را روی n، شمار xهای رشته، به کار می‌گیریم. درستی‌ی پایه‌ی $n = 1$ روشن است. می‌خواهیم درستی‌ی حکم را برای n که $n > 1$، نشان دهیم. راست‌ترین پرانتز باز را در نظر می‌گیریم. دست پایین دو x پس از آن هستند. (چه‌را؟) پس از این دو x باید یک کمانک بسته، ‘)’، داشت. پس این کمانک را جای‌گذاری می‌کنیم. زیررشته‌ی به دست آمده‌ی (xx) یک رشته‌ی موزون است و می‌توان با نگاه داشتن ویژگی‌ی موزونی‌ی رشته‌ی اصلی، به جای آن، رشته‌ی موزون x را گذاشت. (چه‌را؟) پس به رشته‌ی کوتاه شده‌ی $n - 1$ می‌رسیم که بر پایه‌ی فرض استقرا بازیافت شدنی است.

۷ برای هر زیرمجموعه‌ی 4عضوی $96 \cdot 4$ زیرمجموعه‌ی 4عضوی‌ی دیگر داریم که با آن بیش از 2 اشتراک دارند. از این رو با گزینش هر زیرمجموعه‌ی 4عضوی دست بالا $96 \cdot 4 + 1$ زیرمجموعه از $\binom{100}{4}$ زیرمجموعه‌ی 4عضوی کنار می‌روند. پس دست پایین $\lceil \binom{100}{4} / (1 + 4 \cdot 96) \rceil$ زیرمجموعه می‌توان برگزید.

۸

ا 12 گزارش زیر رسیده اند:

$$\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{1,7\},\{1,8\},$$
$$\{1,9\},\{1,10\},\{1,11\},\{2,3\}.$$

تنها می‌توان دریافت 1 یکی از راه‌های فرار بوده است. پس 12 گزارش شاید بس نباشد. اگر یک راه دست پایین در 3 گزارش بیاید، یکی از راه‌های فرار است. راهی که راه فرار نیست، نمی‌تواند در بیش از دو گزارش، یا در یک گزارش تنها بیاید. راه‌های فرار را p_1 و p_2 می‌گیریم. در هر یک از گزارش‌ها دست پایین یکی از p_1 یا p_2 آمده است. 13 گزارش را دریافت کرده ایم. p_1 دست بالا 10 گزارش را بی p_2 می‌تواند بسازد. پس p_2 دست پایین در 3 گزارش آمده است. به همین سان p_1 در دست پایین 3 گزارش هست.

ب گزارش‌های

$$\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{1,2\}$$

دریافت شده اند. با این گزارش‌ها به سادگی 1 و 2 راه‌های فرار هستند. هیچ یک از این گزارش‌ها برای نشان دادن راه‌های فرار کنار گذاشتنی نیستند. (چه‌را؟) پس شمار گزارش‌های لازم می‌تواند تا 5 تا هم باشد. 1 و 2 را راه‌های فرار می‌گیریم. اگر گزارش‌های $\{1\}$ و $\{2\}$ را داشته باشیم، این دو را ارایه می‌کنیم. اگر تنها $\{1\}$ باشد، 2 باید دست پایین در دو گزارش دیگر بی 1 آمده باشد. (چه‌را؟) پس گزارش‌های $\{1\}$، $\{2,a\}$، $\{2,b\}$ که $a,b \neq 1$ و $a \neq b$، ارایه می‌شوند. گیریم نه $\{1\}$ هست، نه $\{2\}$. دست پایین دو گزارش که شامل 1 نباشد، هستند. هم‌چنین دست پایین دو گزارش بی 2 داریم. پس گزارش‌های $\{1,a\}$، $\{1,b\}$، $\{2,c\}$، $\{2,d\}$ را که $a,b \neq 2$، $a \neq b$، $c,d \neq 1$، و $c \neq d$، برمی‌گزینیم به گونه‌یی که $\#\{a,b,c,d\} > 2$. اگر نتوان چنین گزارش‌هایی یافت، آشکارا به ساختار ارایه شده‌ی آغازین رسیده ایم.

هفتمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم عصر ۱۳۷۶/۲/۱۷، و نوبت دوم صبح ۱۳۷۶/۲/۱۸ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۴، و برای آزمون نوبت دوم ۴ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ با نام "جابه‌جایی‌ی مهره‌ها" دارای 10، مساله‌ی ۲ با نام "بازی‌ی سنگ‌ریزه‌ها" دارای 10، مساله‌ی ۳ با نام "خروجی‌ی الگوریتم" دارای 15، مساله‌ی ۴ با نام "پشت و رو کردن سکه‌ها" دارای 15، مساله‌ی ۵ با نام "ماتریس 1 و 1−" دارای 10، مساله‌ی ۶ با نام "مرتب کردن دیسک‌ها" دارای 10، مساله‌ی ۷ با نام "شبکه‌ی کامپیوتری" دارای 15، و مساله‌ی ۸ با نام "سه دستورالعمل" دارای 15 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم هفتمین المپیاد

۱ ۷۰ یک صفحه‌ی 3×3 را در نظر بگیرید که دو مهره‌ی سفید و دو مهره‌ی سیاه در آن به صورت شکل سوی چپ† قرار گرفته اند. B نشان دهنده‌ی مهره‌ی سیاه و W نشان دهنده‌ی مهره‌ی سفید است.

W		B
W		B

B		W
W		B

هر یک از مهره‌ها را می‌توان به این صورت حرکت داد: آن مهره را برداشته و در خانه‌یی که دو ستون و یک سطر، یا دو سطر و یک ستون با آن فاصله دارد قرار می‌دهیم؛ مشروط بر این که خانه‌ی مقصد خالی باشد. (این نوع حرکت هم‌آن حرکت مهره‌ی اسب در شترنج است.) آیا می‌توانیم با حرکت دادن مهره‌ها، به تعداد و ترتیب دل‌خواه، موقعیت صفحه را به شکل سوی راست† تبدیل کنیم؟ توضیح دهید.

۲ ۷۱ دو دسته سنگ‌ریزه که در یکی از آن‌ها m و در دیگری n سنگ‌ریزه قرار دارد در نظر بگیرید. دو بازی‌کن بازی‌ی زیر را با این سنگ‌ریزه‌ها انجام می‌دهند:

هر بازی‌کن در نوبت خود، از یکی از دسته‌ها (یک دسته‌ی دل‌خواه که حد اقل دو سنگ‌ریزه داشته باشد) دو سنگ‌ریزه برداشته و یکی از آن‌ها را به دسته‌ی دیگر اضافه می‌کند. دو بازی‌کن یکی در میان این حرکت را انجام می‌دهند تا جایی که دیگر حرکتی امکان نداشته باشد. در این هنگام کسی که آخرین حرکت را انجام داده است، برنده‌ی بازی محسوب می‌شود.

شرط لازم و کافی برای m و n را به دست آورید که نفر دوم بتواند طوری بازی کند که برنده‌ی بازی شود.

۳ ۷۲ عمل $\oplus$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

فرض کنید که نمایش عددهای x و y در مبنای دو به صورت $x = x_n x_{n-1} \cdots x_1 x_0$ و $y = y_n y_{n-1} \cdots y_1 y_0$ باشد. (در صورت لزوم در سمت چپ نمایش دودویی‌ی عدد کوچک‌تر به تعداد مورد نظر صفر اضافه می‌کنیم.) برای هر i ($0 \leqslant i \leqslant n$)، در صورتی که دقیقن یکی از دو عدد x_i و y_i برابر

با یک و دیگری برابر با صفر باشد، a_i را مساوی با یک و در غیر این صورت مساوی با صفر تعریف می‌کنیم. عددی که نمایش آن در مبنای دو به صورت $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ است برابر با $x \oplus y$ خواهد بود. حال الگوریتم زیر† را در نظر بگیرید:

۱. a_0 را مساوی با 1 و k را مساوی با 1 قرار بده.

۲. a_k را مساوی با a_{k-1} قرار بده.

۳. به مقدار a_k یکی اضافه کن.

۴. F را برابر با 1 قرار بده.

۵. برای هر i از صفر تا $k-1$ $(0 \leqslant i < k)$ این کار را انجام بده:

۵.۱. برای هر j از صفر تا $k-1$ $(0 \leqslant j < k)$ این کار را انجام بده:

۵.۱.۱. در صورتی که $a_k = a_i \oplus a_j$ است، F را مساوی با 0 قرار بده.

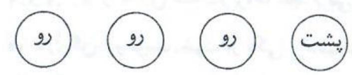
۶. اگر $F = 1$ است، به مقدار k یکی اضافه کن و در غیر این صورت به مرحله‌ی ۳ برو.

۷. اگر $k \leqslant 1376$ است، به مرحله‌ی ۲ برو و در غیر این صورت متوقف شو.

مقدار a_{1376} در انتهای این الگوریتم چند است؟ برای ادعای خود دلیل بیاورید.

۴ n سکه در یک ردیف در کنار هم قرار دارند. بعضی از این سکه‌ها به رو و بعضی به پشت قرار گرفته اند. در هر حرکت می‌توانیم یکی از این n سکه را انتخاب کنیم و آن سکه و سکه‌های مجاور سمت راست و سمت چپ آن را هم‌زمان برگردانیم (از رو به پشت یا از پشت به رو). توجه کنید که در صورتی که سکه‌ی انتخاب شده یکی از دو سکه‌ی انتهایی باشد، دو سکه، و در غیر این صورت سه سکه برگردانده می‌شود.
۷۳

الف ثابت کنید که اگر $n = 3k$ یا $n = 3k+1$ باشد، به هر ترتیبی که سکه‌ها قرار گرفته باشند، با استفاده از چنین حرکت‌هایی می‌توانیم همه‌ی سکه‌ها را به رو برگردانیم. برای مثال اگر $n = 4$ و ترتیب اولیه‌ی سکه‌ها به صورت زیر باشد:



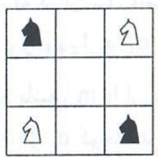
می‌توانیم اول سکه‌ی دوم (از سمت چپ)، سپس سکه‌ی اول، و نهایتن سکه‌ی چهارم را انتخاب کنیم تا همه‌ی سکه‌ها به رو برگردانده شوند.

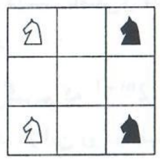
ب ثابت کنید که برای هر n که به صورت $n = 3k+2$ باشد، وضعیت اولیه‌یی وجود دارد که برای آن با استفاده از این حرکت‌ها نمی‌توان این کار را انجام داد (یعنی همه‌ی سکه‌ها را به رو برگرداند).

پاسخ‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم هفتمین المپیاد

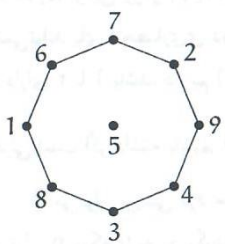
۱ خانه‌ها را با عددهای 1 تا 9 به گونه‌ی زیر شماره‌گذاری می کنیم.

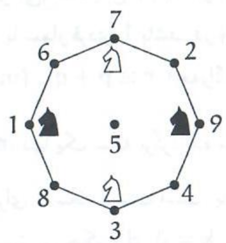
1	2	3
4	5	6
7	8	9

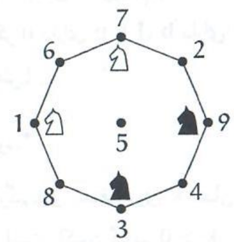




خانه‌ها را گره‌های گراف می‌گیریم. اگر بتوانیم از یک خانه با یک حرکت اسب به خانه‌یی دیگر برویم، گره‌های متناظر را به هم می‌پیوندیم.







موقعیت‌های آغازی و پایانی‌ی اسب‌ها را نیز در بالا داریم . از آن جایی که دو اسب نمی‌توانند در یک خانه جای گیرند، ترتیب آمدن اسب‌ها در چرخه نمی‌تواند تغییر کند. پس حرکت دادن اسب‌ها به جای‌گیری‌ی خواسته شده ناشدنی است.

۲ ♔ با استقرا روی $m+n$ نشان می‌دهیم موقعیت‌های $|m-n| \equiv 0,1,5 \pmod 6$ موقعیت‌های باخت و $|m-n| \equiv 2,3,4 \pmod 6$ موقعیت‌های برد آغازگر بازی هستند. حکم برای پایه‌های $m+n = 1,2$ درست است. (چه‌را؟) گیریم حکم برای $m+n = s-1$ درست باشد. می‌خواهیم نشان دهیم حکم برای $m+n = s$ درست است.

با حرکت بازی‌کن یکم 2 سنگ‌ریزه از یک دسته کاسته و 1 سنگ‌ریزه به دیگری افزوده می‌شود پس $m+n$، 1 واحد کاهش می‌یابد و فرض استقرا را می‌توان به کار برد. $|m-n|$، 3 واحد تغییر کرده است. (چه‌را؟) اگر پیش از حرکت بازی‌کن یکم موقعیت یکی از $|m-n| \equiv 0,1,5$ بود، اکنون داریم $|m-n| \equiv 2,3,4$ و بر پایه‌ی فرض استقرا برد با بازی‌کن دوم خواهد بود. پس برای $m+n=s$، موقعیت‌های $|m-n| \equiv 0,1,5$ موقعیت‌های باخت می‌باشند. به هم‌این سان موقعیت‌های $|m-n| \equiv 2,3,4$ با بازی‌ی بازی‌کن یکم به موقعیت‌های $|m-n| \equiv 0,1,5$ تبدیل می‌شوند که بر پایه‌ی فرض استقرا موقعیت‌های باخت برای بازی‌کن دوم هستند. پس برای $m+n=s$ موقعیت‌های $|m-n| \equiv 0,1,5$ موقعیت‌های برد آغازگر هستند.

۳ عمل‌گر $\oplus$ یای انحصاری نام دارد. با پی‌گیری‌ی الگوریتم روشن است که a_k کوچک‌ترین عدد درست بزرگ‌تر از جمله‌ی پیشین است که یای انحصاری‌ی هیچ دو جمله‌یی از جمله‌های پیشین نیست.

نشان می‌دهیم $a_n = 1_{n+1}$، که در آن 1_n، nامین عدد درست نامنفی‌ی دارای شمار فردی 1 است. گیریم این گونه نباشد. کوچک‌ترین شکست را $a_c \neq 1_{c+1}$ بینگارید.

اگر a_c شمار زوجی 1 داشته باشد، m را آن سان می‌گیریم که $2^m \leqslant a_c < 2^{m+1}$. هر دوی 2^m و $a_c - 2^m$ شمار فردی 1 داشته، از a_c کوچک‌تر هستند. از این رو در دنباله آمده اند. هم‌چنین داریم $a_c - 2^m < 2^m$. پس $a_c = (a_c - 2^m) \oplus 2^m$. (چه‌را؟) تناقض!

گیریم a_c شمار فردی 1 در نمایش دودویی دارد ولی $a_c \neq 1_{c+1}$. a_c کوچک‌ترین شکست بوده، شمار زوجی 1 ندارد. از این رو از 1_{c+1} بزرگ‌تر می‌باشد. پس 1_{c+1} در اجرای گام‌های الگوریتم رد شده است. ولی 1_{c+1} نمی‌تواند یای انحصاری‌ی دو عدد با شمار فردی 1 باشد. در واقع اگر a دارای p تا 1، b دارای q تا 1، و $a \oplus b$ دارای r تا 1 باشد، داریم $r \equiv p+q \pmod 2$. (چه‌را؟) تناقض!

۴ گفتنی است اگر داشته باشیم $n=1$، تنها یک سکه برگردانده می شود.•

ا می‌توان بررسی کرد حکم برای 3 سکه درست است. با به‌کارگیری‌ی استقرا روی k نشان می‌دهیم می‌توان n سکه را به رو برگرداند. درستی‌ی حکم برای $k=0$ روشن است. اکنون گیریم $k>0$.

n سکه را به دو دسته‌ی کنار هم دارای 3 و $n-3$ سکه افراز می‌کنیم. می‌دانیم 3 سکه را می‌توان به رو درآورد. پس با انجام این کار $n-3$ سکه را بر پایه‌ی فرض استقرا به رو درمی‌آوریم. تنها شاید یکی از سکه‌های کناری‌ی دسته‌ی 3سکه‌یی به پشت شده باشد. پس دو تای دیگر را به پشت و پس از آن هر سه را به رو برمی‌گردانیم.

ب برگرداندن دوباره‌ی یک سکه و هم‌سایه‌های‌ش برگرداندن پیشین را بی‌اثر می‌کند. پس می‌توان انگاشت هر سکه 0 یا 1 بار هم‌راه هم‌سایه‌های‌ش برگردانده می‌شود. به این سان برای هر سکه 2 روش و برای n سکه روی هم 2^n روش برگرداندن هست.

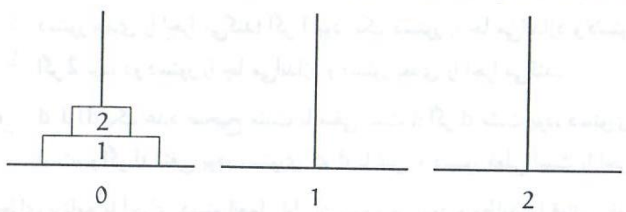
اگر مجموعه‌ی حرکت‌هایی موقعیت P_1 سکه‌ها را به موقعیت P_2 تبدیل کند، هم‌آن مجموعه‌ی حرکت‌ها P_2 را به P_1 می‌برد. (چه‌را؟) پس اگر نشان دهیم از موقعیت همه‌رو نتوان به موقعیتی رفت، از آن موقعیت نیز نمی‌توان به همه‌رو رسید. (چه‌را؟)

دیدیم روی هم می‌توان 2^n روش گزینش سکه‌ها برای برگرداندن داشت. از سویی دیگر دو گزینش $\{\}$ و $\{1,2,4,5,\ldots,3k+1,3k+2\}$ به پی‌آمدی یک‌سان منجر می‌شوند. پس، از هر موقعیت، مانند همه‌رو، به کم‌تر از 2^n موقعیت می‌توان رسید. از این رو موقعیتی پیدا می‌شود که همه‌رو را نتوان به آن و از این رو آن را نتوان به همه‌رو تبدیل نمود.

پرسش‌های نوبت دوم
مرحله‌ی دوم هفتمین المپیاد

۵ ۷۵ تعداد ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های 1 و -1 را پیدا کنید که حاصل ضرب عناصر هر سطر آن برابر با -1 و حاصل ضرب عناصر هر ستون آن نیز برابر با -1 شود. ادعای خود را ثابت کنید.

۶ ۷۶ تعداد 2^k دیسک داریم که روی هر کدام، یکی از عددهای 1 تا 2^k نوشته شده است. $k+2$ میله با شماره‌های صفر تا $k+1$ در یک ردیف پشت سر هم قرار گرفته اند. در ابتدا، دیسک‌ها به یک ترتیب داده شده در میله‌ی صفر روی هم قرار دارند. در هر حرکت می‌توان بالاترین دیسک موجود روی میله‌ی iم را برداشته و روی دیسک‌های میله‌ی $i+1$م قرار داد ($0 \leqslant i \leqslant k$). این حرکت را با T_i نمایش می‌دهیم. حالت نهاییِ مرتب، حالتی است که در آن تمام دیسک‌ها به ترتیب از شماره‌ی 1 تا 2^k (پایین به بالا) روی میله‌ی شماره‌ی $k+1$ قرار گرفته باشند. برای مثال، به ازای $k=1$ دنباله‌ی حرکت‌های لازم برای رسیدن به حالت نهاییِ مرتب از حالت اولیه‌یی به شکل زیر می‌تواند به صورت $\langle T_0, T_0, T_1, T_1 \rangle$ باشد.



ثابت کنید به ازای هر k می‌توان از هر ترتیب اولیه‌ی دیسک‌ها روی میله‌ی شماره‌ی صفر به یک حالت نهاییِ مرتب رسید.

۷ ۷۷ در یک شبکه‌ی کامپیوتری، 2^k کامپیوتر با شماره‌های 1 تا 2^k وجود دارد. هر یک از این کامپیوترها با یک کد یک‌تا، که یک دنباله‌ی kتایی از عددهای صفر و یک است، مشخص می‌شود. دو کامپیوتر به صورت مستقیم به هم متصل هستند اگر و فقط اگر کد مربوط به آن‌ها دقیقن در یک رقم با هم تفاوت داشته باشند. برای مثال اگر $k=4$ باشد، کامپیوتری که دارای کد 0100 است مستقیمن به کامپیوترهایی با کدهای 1100، 0000، 0110، و 0101 متصل است.

در ابتدای کار، هر یک از کامپیوترها، دارای یک پیام است. پیامی که در ابتدا در کامپیوتر شماره‌ی i ($1 \leqslant i \leqslant 2^k$) وجود دارد، باید در نهایت به کامپیوتر p_i ($1 \leqslant p_i \leqslant 2^k$) برسد. فرض کنید که در بین p_iها عدد تکراری وجود ندارد، یعنی در نهایت هر کدام از کامپیوترها باید یک پیام دریافت کنند.

در هر مرحله، هر کدام از کامپیوترها می‌تواند پیغامی که دارد را به یکی از کامپیوترهایی که مستقیمن به آن متصل است بدهد؛ به شرطی که هر کامپیوتری پس از پایان آن مرحله بیش از یک پیام نداشته باشد. (یعنی اگر در یک مرحله، کامپیوتر a پیام خود را به کامپیوتر b بدهد، کامپیوتر b هم باید پیامی که قبل از این مرحله داشته است را در هم‌این مرحله به یک کامپیوتر بدهد. هم‌چنین هیچ کامپیوتر دیگری غیر از a نمی‌تواند پیام خود را در هم‌این مرحله به b بدهد.)

ثابت کنید که در حد اکثر $2^k - 1$ مرحله، کامپیوترها می‌توانند همه‌ی پیام‌ها را با توجه به شرط فوق به مقصدشان برسانند.

۸ ۷۸ یک کامپیوتر دارای حافظه‌یی است که می‌تواند یک لیست از عددها (که هر کدام از آن‌ها 0، 1، یا 2 هستند) را نگه‌داری کند. محدودیتی در طول لیستی که در حافظه‌ی این کامپیوتر نگه‌داری می‌شود وجود ندارد. این کامپیوتر می‌تواند یک برنامه را اجرا کند. هر برنامه شامل تعدادی دستور است که به ترتیب مشخصی قرار گرفته اند. این کامپیوتر تنها سه نوع دستورالعمل را قبول می‌کند که عبارت اند از:

- E x (x یکی از عددهای 0، 1 یا 2 است.): این دستور عدد x را به انتهای (سمت راست) لیست عددها اضافه می‌کند و پس از آن دستور بعدی را انجام می‌دهد.
- D: عددی که در ابتدای (سمت چپ) لیست عددها قرار دارد را از لیست برمی‌دارد. اگر این عدد 0 بود، دستور بعدی را اجرا می‌کند؛ اگر 1 بود، یک دستور را جا می‌اندازد و دستور بعد از آن را اجرا می‌کند؛ و اگر 2 بود، دو دستور را جا می‌اندازد و دستور بعدی را اجرا می‌کند.
- J d (d یک عدد صحیح مثبت یا منفی است.): اگر d مثبت بود، دستوری که d تا بعد از دستور فعلی است، و اگر d منفی بود، دستوری که d تا قبل از دستور فعلی است را اجرا می‌کند.

اجرای برنامه با اجرای دستورالعمل اول آن شروع می‌شود و مطابق با قوانین فوق ادامه می‌یابد. اگر در یک مرحله، دستورالعملی که قرار است اجرا شود، وجود نداشت (برای مثال با یک دستور J به یک دستور که در برنامه وجود ندارد پرش کردیم)، اجرای برنامه متوقف می‌شود. هم‌چنین اگر لیست عددها خالی بود و به دستورالعمل D برخوردیم، برنامه متوقف می‌شود.

برای مثال برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید. (شماره‌های نوشته شده در سمت چپ دستورات، نشان دهنده‌ی ترتیب اجرای آن‌ها است.) در صورتی که پیش از اجرای این برنامه لیست عددها 1,1 باشد، با اجرای این برنامه به ترتیب دستورات شماره‌ی 1، 3، 5، 6، 3، و 4 اجرا می‌شوند و پس از آن، برنامه متوقف شدن برنامه، لیست عددها خالی خواهد بود.


```
1. D
2. E 1
3. D
4. J 4
5. E 0
6. J -3
```

الف برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

```
1. E 2
2. D
3. J 3
4. J 4
5. J 10
6. E 1
7. J -5
8. E 0
9. J -7
```

در صورتی که قبل از اجرای این برنامه، لیست عددها 1,0,0,1,0 باشد، پس از اجرای این برنامه این لیست به چه شکلی در خواهد آمد؟ توضیح دهید.

ب برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

```
1. E 2
2. E 2
3. D
4. J 5
5. J 1
6. E 2
7. E 0
8. E 6
9. D
10. E 0
11. J -8
12. E 2
13. E 1
14. D
```

15. J 7
16. J 8
17. E 2
18. D
19. J −15
20. J −15
21. J 10
22. E 0
23. J −9
24. E 1
25. J −11

در صورتی که قبل از اجرای این برنامه، لیست عددها از 1376 تا عدد صفر تشکیل شده باشد، پس از اجرای این برنامه این لیست به چه شکلی در خواهد آمد؟ توضیح دهید.

پ فرض کنید که یک لیست از عددهای 0 و 1 در حافظه‌ی این کامپیوتر قرار دارد. (توجه کنید که لیست، شامل عدد 2 نیست.) برنامه‌یی برای این کامپیوتر بنویسید که پس از اجرای آن، این لیست بر عکس شود. در مورد برنامه‌یی که می‌نویسید توضیح دهید.

پاسخ‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم هفتمین المپیاد

۵ ماتریس را $[a_{ij}]_{m\times n}$ می‌گیریم. سطر mم و ستون nم را کنار گذاشته، به پر کردن ماتریس به دست آمده‌ی $[a'_{ij}]_{(m-1)\times(n-1)}$ می‌پردازیم. آشکارا $2^{(m-1)(n-1)}$ روش پر کردن این زیرماتریس هست. هر سطر i از این زیرماتریس، a_{in} را به گونه‌یی 1تا تعیین می‌کند. به هم‌این سان a_{m1} تا $a_{m(n-1)}$ نیز به گونه‌یی 1تا پر می‌شوند. تنها a_{mn} می‌ماند. حاصل ضرب همه‌ی خانه‌های زیرماتریس را P، حاصل ضرب خانه‌های سطر mم ماتریس را جز خانه‌ی a_{mn}، برابر R، و حاصل ضرب همه‌ی خانه‌های ستون nم را جز خانه‌ی a_{mn}، برابر C می‌گیریم. داریم $RP = (-1)^{n-1}$ و $CP = (-1)^{m-1}$. (چه‌را؟) پس داریم $R = -(-1)^{n}P$ و $C = -(-1)^{m}P$. اگر داشته باشیم $m \equiv n \pmod 2$، a_{mn} به 1 شیوه‌ی $a_{mn} = (-1)^{n}P$ و اگر $m \not\equiv n \pmod 2$، a_{mn} به 0 شیوه پر می‌شود. پس شمار ماتریس‌های خواسته شده برای $m \equiv n \pmod 2$ برابر $2^{(m-1)(n-1)}$ و برای $m \not\equiv n \pmod 2$ برابر 0 است.

۶ استقرا را روی k به کار می‌گیریم. درستی‌ی پایه‌ی $k = 0$ روشن است. می‌خواهیم درستی‌ی حکم را برای $k > 0$ نشان دهیم. یکی یکی گام T_0 را انجام می‌دهیم. اگر گرده‌ی جا به جا شده شماره‌یی بزرگ‌تر از 2^{k-1} داشت، آن را در میله‌ی 1 نگاه می‌داریم. اگر این گرده شماره‌یی نابزرگ‌تر از 2^{k-1} داشت، بر پایه‌ی آن چه در فرض استقرا برای $k-1$ با k میله می‌دانیم، جابه‌جایی‌های لازم را در میله‌های 3 تا $k+2$ انجام داده، گام T_1 را اعمال می‌کنیم. پس در پایان گام‌های T_0 گرده‌های 1 تا 2^{k-1} به ترتیب در میله‌ی $k+1$ و گرده‌های $2^{k-1}+1$ تا 2^k در میله‌ی 1 هستند. گرده‌های میله‌ی 1 را بر پایه‌ی فرض استقرا می‌توان در میله‌ی $k+1$ به ترتیب نشاند.

۷ استقرا را روی n به کار می‌گیریم. درستی‌ی پایه‌ی $n = 0$ را آشکارا داریم. گیریم حکم برای $n-1$ برقرار باشد. می‌خواهیم نشان دهیم برای 2^n رایانه می‌توان پیام‌ها را با دست بالا $2^n - 1$ گام به مقصدهاشان رساند.

رایانه‌ها را به دو گروه Z و O که کدهای رایانه‌های گروه Z با 0 و کدهای رایانه‌های گروه O با 1 آغاز شوند، افراز می‌کنیم. هر رایانه از هر یک از این گروه‌ها به $n-1$ رایانه در گروه خود و 1 رایانه در گروه دیگر پیوسته است. رایانه‌های گروه Z را با Z_1 تا Z_n و رایانه‌ی پیوسته به Z_i را در گروه O با O_i نام‌گذاری می‌کنیم. گیریم مقصدهای پیام‌های m تا از رایانه‌های گروه Z به نام‌های Z_{z_1} تا Z_{z_m} رایانه‌هایی در گروه O باشند. به هم‌این

شمار، رایانه‌هایی در گروه O باید پیام‌های خود را به رایانه‌هایی در گروه Z برسانند. (چه‌را؟) این رایانه‌ها را در گروه O، O_{o_1} تا O_{o_m} می‌گیریم.

بر پایه‌ی فرض استقرا رایانه‌های Z_{z_1} تا Z_{z_m} می‌توانند در دست بالا $2^{n-1}-1$ گام پیام‌های خود را به رایانه‌های Z_{o_1} تا Z_{o_m} برسانند. (مقصدهای پیام‌های دیگر رایانه‌ها را می‌توان خود هم‌آن رایانه‌ها برگزید.) پس از آن، رایانه‌های Z_{o_i} و O_{o_i} پیام‌های خود را در یک گام مبادله می‌کنند. $2^{n-1}-1$ گام مانده است و هر پیامی مقصدی در گروه خود دارد. بر پایه‌ی فرض استقرا در گام‌های مانده می‌توان پیام‌ها را به مقصدها رساند.

۸

آ برنامه به روشنی با گرفتن یک لیست از 0 و 1، 0ها را به 1 و 1ها را به 0 تبدیل می‌کند:

$$01001 \longrightarrow 10110.$$

ب ♦ برنامه با گرفتن یک لیست از n تا 0 نمایش دودویی‌ی n را با یک 2 در پایان به دست می‌دهد. برای نمونه داریم

$$00000 \longrightarrow 1012.$$

پس در پایان رشته‌ی 101011000002 در لیست خواهد بود.

پ ♦♦ با به‌کارگیری‌ی دو 2 لیست را میان آن دو وارون می‌کنیم.

1. E 2
2. D
3. J +3
4. J +20
5. J +50
6. E 2
7. D
8. J +12
9. J +13
10. E 2
11. D
12. J +4
13. J +5
14. E 0
15. J −13
16. E 0

17. J −6
18. E 1
19. J −8
20. E 0
21. J −14
22. E 0
23. J +2
24. E 2
25. D
26. J +12
27. J +13
28. E 2
29. D
30. J +4
31. J +5
32. E 1
33. J −31
34. E 0
35. J −6
36. E 1
37. J −8
38. E 1
39. J −32
40. E 1
41. J −16

هشتمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم عصر ۱۳۷۷/۲/۲۳، و نوبت دوم صبح ۱۳۷۷/۲/۲۴ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۴، و برای آزمون نوبت دوم ۴ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ با نام "تقسیم پول" دارای 10، مساله‌ی ۲ با نام "بازی" دارای 10، مساله‌ی ۳ با نام "مسیر فراگیر" دارای 15، مساله‌ی ۴ با نام "اعداد روی دایره" دارای 15، مساله‌ی ۵ با نام "فرش‌ها" دارای 10، مساله‌ی ۶ با نام "پیچ‌ها و مهره‌ها" دارای 10، مساله‌ی ۷ با نام "فلش‌ها" دارای 15، و مساله‌ی ۸ با نام "ماتریس عجیب" دارای 15 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم هشتمین المپیاد

۱ ۸۱ مقداری پول را بین n نفر تقسیم کرده ایم. عدد طبیعی‌ی k را در نظر بگیرید؛ می‌خواهیم کاری کنیم که اختلاف مقدار پولی که این افراد دارند از k تومان بیش‌تر نباشد. برای این کار عمل زیر را انجام می‌دهیم:

- دو نفر مانند a و b پیدا می‌کنیم که a حد اقل $k+1$ تومان بیش‌تر از b پول داشته باشد. سپس a را مجبور می‌کنیم که k تومان به b بدهد.

این کار را تا وقتی که چنین دو نفری وجود داشته باشند، تکرار می‌کنیم. ثابت کنید به هر ترتیبی که این کار را انجام دهیم، بالاخره به حالتی خواهیم رسید که هیچ دو نفری وجود نداشته باشند که اختلاف مقدار پول‌شان از k تومان بیش‌تر باشد.

۲ ۸۲ دو نفر این بازی را با تعدادی سنگ‌ریزه انجام می‌دهند: در ابتدا، n سنگ‌ریزه موجود است $(n > 1)$. با توجه به قاعده‌ی زیر، دو نفر به ترتیب، یک در میان، از این سنگ‌ریزه‌ها برمی‌دارند. قاعده‌ی بازی به این صورت است که در اولین حرکت، بازی‌کن می‌تواند به هر تعدادی که بخواهد از این سنگ‌ریزه‌ها بردارد، ولی باید حد اقل یک، و حد اکثر $n-1$ سنگ‌ریزه بردارد. پس از آن هر بازی‌کن در نوبت خودش، می‌تواند حد اقل یک، و حد اکثر به اندازه‌ی تعدادی که بازی‌کن دیگر در حرکت قبل برداشته، سنگ‌ریزه بردارد. برای مثال، اگر بازی‌کن اول، در اولین حرکت‌ش 2 سنگ‌ریزه بردارد، در حرکت بعد، بازی‌کن دوم می‌تواند 1 یا 2 سنگ‌ریزه بردارد. برنده‌ی بازی کسی خواهد بود که آخرین سنگ‌ریزه را بردارد.

ا ثابت کنید اگر $n = 6$ باشد، نفر اول (کسی که بازی را شروع کرده است) می‌تواند طوری بازی کند که هم‌واره برنده شود؛ یعنی نفر اول می‌تواند به گونه‌یی بازی کند که اگر نفر دوم در هر مرحله به‌ترین حرکتی که می‌تواند را انجام دهد، نفر اول برنده شود.

ب ثابت کنید که در حالت کلی اگر n توانی از دو باشد، نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که هم‌واره برنده شود، و در غیر این صورت نفر اول می‌تواند برنده شود.

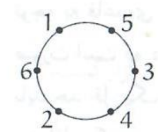
۳ ۸۴ یک شبکه‌ی $m \times n$ شامل mn نقطه است که مطابق شکل زیر در m ردیف و n ستون قرار گرفته اند.

یک مسیر فراگیر در این شبکه، مسیری است که از نقطه‌ی گوشه‌ی بالا و سمت چپ آغاز شده، از هر نقطه‌ی شبکه دقیقن یک بار عبور کند، و به نقطه‌ی گوشه‌ی پایین و سمت راست شبکه برسد. در طی این مسیر تنها مجاز ایم که از هر نقطه به یکی از نقاط سمت راست، چپ، بالا، یا پایین آن (در صورت وجود) برویم. شکل زیر یک مسیر فراگیر برای یک شبکه‌ی 4×3 را نشان می‌دهد.

ثابت کنید که مسیر فراگیر تنها در صورتی وجود دارد که دست کم یکی از m و n فرد باشد.

۴ ۸۵ $2n$ نقطه محیط یک دایره را به $2n$ قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. A' را نقطه‌ی مقابل A می‌نامیم، اگر AA' یک قطر دایره باشد. می‌خواهیم هر یک از عددهای 1 تا $2n$ را روی یکی از این نقاط بنویسیم (هر نقطه یک عدد) به طوری که برای هر دو نقطه‌ی متوالی روی دایره مانند A و B، اگر نقطه‌های مقابل این دو نقطه به ترتیب A' و B' باشد، مجموع عددهای نوشته شده روی A و B، با مجموع عددهای نوشته شده روی A' و B' برابر باشد.

برای مثال شکل زیر یک جواب مساله برای حالت $n = 3$ است.



ا ثابت کنید که اگر n یک عدد فرد باشد، این کار هم‌واره ممکن است.

ب ثابت کنید که اگر n یک عدد زوج باشد، این کار ممکن نیست.

پاسخ‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم هشتمین المپیاد

۱ با به‌کارگیری‌ی استقرا روی n نشان می‌دهیم گروه nنفری به پای‌داری می‌رسد. برای پایه‌ی $n = 0$ به روشنی پای‌داری برقرار است. گیریم هر گروه $n - 1$نفری برای $n > 0$ به پای‌داری می‌رسد. گروهی nنفری را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم سرانجام یکی از این افراد دیگر در تبادل‌ها شرکت نخواهد کرد.

پول‌دارترین فرد را دارای M تومان و پول‌ندارترین را دارای m تومان می‌انگاریم. اگر یک پول‌دارترین در تبادل شرکت کند، پولش $M - k$ تومان شده، هم‌واره کم‌تر از M تومان خواهد ماند. (چه‌را؟) هم‌چنین پول هیچ فردی هیچ گاه کم‌تر از m تومان نخواهد شد. اگر یکی از پول‌دارترین‌ها در تبادل‌ها شرکت نکند، به خواسته رسیده ایم. در غیر این صورت پس از شماری گام همه‌ی پول‌دارترین‌ها در تبادل شرکت می‌کنند و $|M - m|$ کاهش می‌یابد. $|M - m|$ عددی درست و نامنفی است. پس کاهش محدود خواهد داشت و پس از شماری گام دیگر تغییر نخواهد کرد.

با ثابت شدن $|M - m|$ دست پایین یکی از پول‌دارترین‌ها هم‌واره M تومان خواهد داشت. پس او دیگر در تبادل‌ها شرکت نخواهد کرد و تبادل‌ها در صورت وجود محدود به $n - 1$ نفر دیگر می‌شوند. بر پایه‌ی فرض استقرا این $n - 1$ نفر نیز به پای‌داری خواهند رسید.

۲

ا بازی‌کن یکم 2 سنگ‌ریزه برمی‌دارد. پس اگر بازی‌کن دوم 1 سنگ‌ریزه برداشت، گام‌های بعدی منجر به برد بازی‌کن یکم می‌شوند. (چه‌را؟) اگر هم بازی‌کن دوم 2 سنگ‌ریزه برداشت، بازی‌کن یکم می‌تواند 2 سنگ‌ریزه‌ی مانده را بردارد.

ب با استقرا روی m نشان می‌دهیم برای $n = 2^m$ آغازگر بازی می‌بازد. درستی‌ی حکم برای $m = 0$ روشن است. پایه را $m = 1$ می‌گیریم. درستی‌ی حکم برای پایه نیز آشکار است. گیریم حکم برای $n = 2^{m-1}$ که $m > 1$، درست باشد. می‌خواهیم نشان دهیم حکم برای 2^m درست است. اگر بازی‌کن یکم $\geqslant 2^{m-1}$ سنگ‌ریزه بردارد، بازی‌کن دوم مانده‌ی سنگ‌ریزه‌ها را برمی‌دارد. جز این اگر بازی‌کن یکم $< 2^{m-1}$ سنگ‌ریزه بردارد، بازی‌کن دوم می‌تواند بازی‌ی $n = 2^{m-1}$ را انجام داده، بر پایه‌ی این بازی

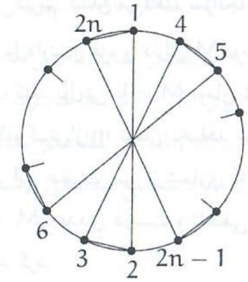
سنگ‌ریزه‌ی 2^{m-1}م را بردارد و 2^{m-1} سنگ‌ریزه‌ی مانده را به بازی‌کن یکم تحویل دهد. در بازی‌ی بازمانده‌ی $n = 2^{m-1}$ آغازگر می‌بازد. پس به این سان در بازی‌ی $n = 2^m$ نیز آغازگر خواهد باخت.

اگر $n = 2^m + l$ که $0 < l < 2^m$، بازی‌کن یکم l سنگ‌ریزه برمی‌دارد. پس بازی‌کن دوم را آغازگر بازی‌ی 2^m گردانده، خود برنده می‌شود.

۳ گیریم m و n، هردو، زوج باشند. نقطه‌ها را با دو رنگ شترنجی رنگ می‌کنیم. در هر مسیری در این شبکه رنگ گره‌ها یکی در میان تغییر می‌کند. پس اگر مسیری فراگیر بخواهد باشد، از آن جایی که mn زوج است، باید گره‌های 1م و mnم ناهم‌رنگ باشند. ولی در رنگ‌آمیزی‌ی شترنجی با m و n زوج این دو گروه هم‌رنگ هستند. دقت کنید که درستی‌ی "اگر" خواسته نشده است.•

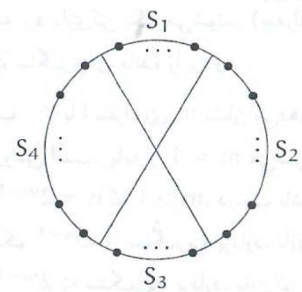
۴

آ با آرایشی به گونه‌ی نشان داده شده در زیر به روشنی خواسته برآورده شده است.



روشن است که چون n فرد است، $2n$ کنار 1 خواهد بود.

ب گیریم بتوان چنین آرایشی داشت. با کشیدن یکی از قطرها گره‌ها را به دو دسته‌ی nتایی در دو سوی قطر افراز می‌کنیم. با دسته‌بندی‌ی نقطه‌های هر سوی قطر به $n/2$ جفت کنار هم به سادگی می‌توان دریافت مجموع عددهای دو سوی قطر کشیده شده یک‌سان است. قطر دیگری را از دایره می‌کشیم تا گره‌های دایره به چهار تکه با مجموع‌های S_1، S_2، S_3، S_4 به گونه‌ی زیر افراز گردند.



با توجه به یک‌سان بودن مجموع گره‌های دو سوی هر قطر داریم

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4,$$
$$S_2 + S_3 = S_4 + S_1.$$

به این سان داریم $S_1 = S_3$ و $S_2 = S_4$. اکنون اگر S_1 و S_2 را شامل تنها یک گره گیریم، این دو گره باید عددهای یک‌سانی داشته باشند. این با گوناگون بودن عددهای پیرامون دایره تناقض دارد.

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم هشتمین المپیاد

۵ ۸۷ یک اتاق به شکل مستطیل را با تعدادی فرش مستطیل‌شکل پوشانده ایم؛ به طوری که هر نقطه از کف اتاق توسط دقیقن یک فرش پوشانده شده است.

ثابت کنید مجموع عرض این فرش‌ها از عرض اتاق کم‌تر نیست. منظور از عرض یک مستطیل اندازه‌ی کوتاه‌ترین ضلع آن است.

۶ ۸۸ n پیچ و n مهره که از نظر ظاهری شبیه به هم هستند، داده شده اند. می‌دانیم که هر پیچ تنها به یک مهره می خورد (با آن هم‌اندازه است) و هیچ دو پیچی هم‌اندازه نیستند.

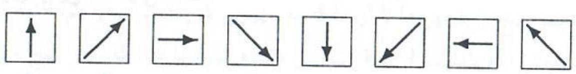
عمل آزمون یعنی برداشتن یک پیچ و یک مهره و امتحان کردن آن‌ها. با این کار تشخیص می‌دهیم که پیچ از مهره بزرگ‌تر است، مهره از پیچ بزرگ‌تر است، یا این که هر دو هم‌اندازه هستند.

می‌خواهیم با انجام تعدادی عمل آزمون، کوچک‌ترین پیچ و کوچک‌ترین مهره (که مسلمن به هم می‌خورند) را پیدا کنیم. توجه کنید که نمی‌توان دو مهره یا دو پیچ را مستقیمن با هم مقایسه کرد.

ا نشان دهید که برای $n = 2$ مساله را در بدترین حالت می‌توان با دو آزمون حل کرد.

ب روشی ارایه دهید تا بتوان مساله را در حالت کلی با $2n - 2$ آزمون حل کرد.

۷ ۹۰ در هر یک از خانه‌های یک جدول 1000×1000، یک فلش رسم شده است. هر فلش یکی از هشت جهت زیر را نشان می‌دهد.

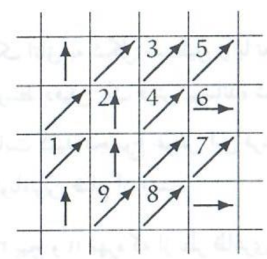


1 2 3 4 5 6 7 8

دو خانه از این جدول مجاور به حساب می‌آیند، اگر دست کم در یک راس مشترک باشند. (بنا بر این هر یک از خانه‌های این جدول حد اکثر 8 خانه‌ی مجاور دارد.) می‌دانیم که جهت فلش‌های کشیده شده در دو خانه‌ی مجاور حد اکثر به اندازه‌ی 45 درجه با هم اختلاف دارند. یعنی برای مثال اگر فلش یک خانه به

شکل 1 (مطابق با شکل فوق) باشد، فلش هر یک از خانه‌های مجاورش به یکی از سه شکل 1، 2، یا 8 است.

ا از یک خانه‌ی دل‌خواه این جدول شروع به حرکت می‌کنیم و در هر مرحله، به یکی از خانه‌های مجاور خانه‌یی که در آن هستیم، می‌رویم. با توجه به شرایط مساله، جهت فلش خانه‌یی که به آن می‌رویم نسبت به جهت فلش خانه‌یی که در آن هستیم، به اندازه‌ی 45−، 0، یا 45 درجه در جهت عقربه‌های ساعت اختلاف دارد. مقدار این اختلاف درجه را یادداشت می‌کنیم. برای مثال، اگر شکل زیر نشان دهنده‌ی قسمتی از جدول باشد و به ترتیب خانه‌های 1 تا 9 را طی کرده و به خانه‌ی 1 بازگردیم، به ترتیب عددهای 45−، 45، 0، 0، 45، 45−، 0، 0، و 0 را یادداشت خواهیم کرد.



ثابت کنید اگر پس از طی چند مرحله به خانه‌یی که حرکت را از آن جا آغاز کرده بودیم برسیم، مجموع عددهایی که یادداشت کرده ایم، برابر با صفر خواهد بود.

ب حال می‌خواهیم در این جدول با توجه به جهت فلش‌ها حرکت کنیم؛ به این صورت که از یک خانه‌ی دل‌خواه جدول شروع می‌کنیم و در هر مرحله اگر در خانه‌ی a باشیم، به خانه‌ی مجاوری می رویم که فلش a به سمت آن اشاره می‌کند. اگر a کنار جدول باشد و فلش آن به سمت خارج از جدول اشاره کند، از جدول خارج می‌شویم. ثابت کنید که با این نحوه‌ی حرکت بالاخره از جدول خارج خواهیم شد.

۸ یک ماتریس به ابعاد $n^2 \times (n+1)$ (n^2 سطر و $n+1$ ستون) داده شده است. این ماتریس با اعداد 1 تا n پر شده است، به طوری که برای هر دو ستون این ماتریس، اگر عناصر این دو ستون را در کنار هم بنویسیم، هر یک از n^2 زوج ممکن از عددهای 1 تا n را در یک سطر می‌بینیم. برای مثال برای $n=2$، ماتریس زیر دارای چنین خاصیتی است.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ثابت کنید هر دو سطر این ماتریس دقیقن در یک درایه‌ی متناظر، با هم برابر اند؛ یعنی برای هر دو سطر دل‌خواه i و j، فقط یک ستون وجود دارد که مقادیر درایه‌های سطر iام و سطر jام در آن یک‌سان باشند.

پاسخ‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم هشتمین المپیاد

5 اگر متناظر با هر بازه‌یی از عرض مستطیل، عرض فرش وجود داشته باشد، حکم درست است. در غیر این صورت بازه‌یی از عرض مستطیل یافت می‌شود که اگر دو خط موازی‌ی طول‌ها از دو سر بازه بکشیم، میان دو خط کشیده شده عرض هیچ فرشی موازی‌ی عرض مستطیل قرار نگرفته باشد. در این صورت عرض‌های این فرش‌ها به موازات طول قرار گرفته اند و مجموع‌شان از طول مستطیل کم‌تر نیست. پس باز به خواسته رسیدیم.

۶

ا پیچ‌ها و مهره‌ها را به دو دسته‌ی پیچ و مهره افراز کرده، در هر دسته پیچ را با مهره سنجیده، بزرگ‌تر سنجش را کنار می‌گذاریم. کوچک‌ترین پیچ و کوچک‌ترین مهره مانده اند.

ب استقرای قوی را به کار گرفته، با قوی کردن فرض استقرا نشان می‌دهیم در هر دسته‌ی mتایی از پیچ‌ها و مهره‌ها شامل کوچک‌ترین پیچ و کوچک‌ترین مهره، می‌توان آن دو را در $m-2$ سنجش یافت.

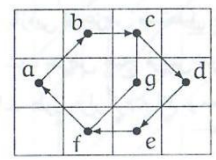
درستی‌ی پایه‌ی $m=2$ روشن است؛ دسته تنها کوچک‌ترین پیچ و کوچک‌ترین مهره را دارد. گیریم حکم برای $m >$ که $m > 2$، درست باشد. یک پیچ را از دسته‌ی mتایی برگزیده، آن را با مهره‌یی دیگر از این دسته می‌سنجیم. اگر پی‌آمد سنجش جز برابری بود، بزرگ‌تر سنجش را کنار می‌گذاریم. به این سان به دسته‌یی با $m-1$ پیچ و مهره شامل کوچک‌ترین‌ها می‌رسیم که $m-3$ سنجش برای یافتن کوچک‌ترین‌ها در آن بس است. پس روی هم $m-2$ سنجش در دسته‌ی mتایی کوچک‌ترین‌ها را به دست داده است.

گیریم پی‌آمد سنجش برابری باشد. اگر همه‌ی $m-2$ چیز مانده مهره باشند، کار به انجام رسیده است. در غیر این صورت سنجش پیچ را با مهره‌ها تا آن‌جا که به مهره‌یی کوچک‌تر برخوریم، ادامه می‌دهیم. اگر مهره‌یی کوچک‌تر را در سنجش kام یافتیم، $k+1$ سنجش داشته ایم و با کنار گذاشتن پیچ و مهره‌های آزموده شده جز مهره‌ی پایانی، $k+1$ تا از دسته‌ی mتایی کاسته می‌شود و به دسته‌یی با $m-(k+1)$ چیز می‌رسیم. به روشنی بر پایه‌ی فرض استقرا باز به نتیجه‌ی دل‌خواه دست یافته ایم. گیریم مهره‌یی کوچک‌تر یافت نشود. پس هم‌آن پیچ و مهره‌ی آغازی پیچ و مهره‌ی خواسته شده بوده اند و از آن جایی که دست پایین 2 پیچ در دسته بوده اند، شمار سنجش‌ها دست بالا $m-2$ بوده است.

۷ مجموع اختلاف زاویه‌های دور را برآیند زاویه‌یی آن دور نام می‌گذاریم.

ا ❖❖ از آن جایی که در پایان به خانه‌ی آغازین بازگشته ایم، به سادگی برآیند زاویه‌یی $2k\pi$، مضربی درست از 2π، است. (چه‌را؟) نشان می‌دهیم $k = 0$. گیریم برای شماری از دورها داریم $k \neq 0$. از میان این دورها کوتاه‌ترین را برمی‌گزینیم: آن که کم‌ترین شمار جابه‌جایی‌ها را دارد. این دور نمی‌تواند از خانه‌یی دو بار بگذرد. چه‌را که در این صورت می‌توان دور را به دو دور کوتاه‌تر افراز کرد و در یکی از این دو دور برآیند زاویه‌یی ناصفر خواهد بود. (چه‌را؟) پس کوتاه‌ترین دور از خانه‌یی تکراری نمی‌گذرد.

از آن جایی که هر جابه‌جایی اختلاف زاویه‌ی دست بالا $\pi/4$ را دارد، دست پایین 8 جابه‌جایی در این دور به کار رفته است. می‌توان بررسی کرد اگر دور از بیش از 4 جابه‌جایی به دست آمده باشد، می‌توان با پیوستن دو گره از آن، آن را به دو دور کوتاه‌تر تبدیل کرد. برای نمونه در شکل زیر دور abcdef دو دور کوتاه‌تر abcgf و cdefg را به دست داده است.



سوی پیمایش دو دور به دست آمده را به گونه‌یی که در یال‌های مشترک با دور آغازین سوهای یک‌سانی برای پیمایش اعمال شود، برمی‌گزینیم. به این سان مجموع برآیندهای زاویه‌یی دو دور به دست آمده با برآیند زاویه‌یی دور آغازین یک‌سان است. (چه‌را؟) پس دست پایین یکی از دو دور جدید برآیند زاویه‌یی ناصفر دارد و کوتاه‌تر از دور آغازین است. تناقض!

ب ❖ گیریم از جدول بیرون نرویم. از آن جایی که شمار خانه‌ها کران‌دار است، سرانجام به خانه‌یی تکراری خواهیم رسید. پس می‌توان دوری یافت. کوتاه‌ترین دور را در نظر می‌گیریم. پیوستن مرکزهای خانه‌های این دور به ترتیب پیمایش، یک چندگوش ساده را به دست می‌دهد. مجموع زاویه‌های بیرونی‌ی یک چندگوش ساده 2π است. (چه‌را؟ دقت کنید زاویه‌های بیرونی را که درون چندگوش ساخته می‌شوند، منفی می‌گیریم.) پس این دور برآیند زاویه‌یی ناصفر دارد که بر پایه‌ی قسمت پیشین ناشدنی است.

۸ ❖ اگر دو سطر درایه‌های یک‌سانی در دو ستون داشته باشند، در این دو ستون دو جفت یک‌سان خواهند بود و این دو ستون همه‌ی جفت‌های ممکن را به دست نخواهند داد. پس هر دو سطر در دست بالا 1 جا یک‌سان هستند.

در هر ستون هر یک از عددهای 1 تا n را n بار داریم. پس هر سطر در هر درایه‌ی خود با $n - 1$ سطر دیگر یک‌سان است. از آن جایی که این سطر با سطرهای دیگر در دست بالا 1 جا اشتراک دارد و دارای $n + 1$ درایه است، با $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$ سطر دیگر اشتراک خواهد داشت. پس این سطر با همه‌ی سطرهای دیگر در درست 1 جا اشتراک دارد.

نهمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم عصر ۱۳۷۸/۲/۲۲، و نوبت دوم صبح ۱۳۷۸/۲/۲۳ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۴، و برای آزمون نوبت دوم ۴ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ با نام "ایشانگولولو" دارای 10، مساله‌ی ۲ با نام "دنباله‌های دودویی" دارای 10، مساله‌ی ۳ با نام "مهره‌های روی قطر" دارای 15، مساله‌ی ۴ با نام "عددهای ماندگار" دارای 15، مساله‌ی ۵ با نام "تالارهای دوستی" دارای 10، مساله‌ی ۶ با نام "جست و جوی عدد در جدول" دارای 10، مساله‌ی ۷ با نام "مسیر فراگیر" دارای 15، و مساله‌ی ۸ با نام "بازی‌ی دور میز" دارای 15 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم نهمین المپیاد

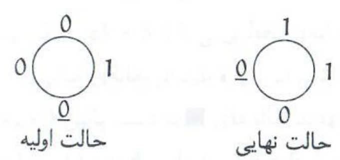
۱ ۹۳ مدتی پیش در آزمایش‌گاهی در یک کشور آفریقایی باکتری‌ی خطرناکی به نام ایشانگولولو بر اثر یک اتفاق به وجود آمد. این باکتری پس از بلوغ به دو باکتری‌ی مثل خود تقسیم می‌شود. سن بلوغ این باکتری‌ها لزومن با هم برابر نیست. یک باکتری‌ی A را از نسل یک باکتری‌ی B می‌گوییم، اگر از تقسیم شدن باکتری‌ی B یا یکی از باکتری‌هایی که از نسل B هستند به وجود آمده باشد. اگر اکنون 3k باکتری در آزمایش‌گاه موجود باشد، ثابت کنید باکتری‌یی وجود داشته است که تعداد باکتری‌های فعلی که از نسل او هستند، عددی بزرگ‌تر یا مساوی‌ی k ~~یا~~ و کوچک‌تر یا مساوی‌ی 2k است.

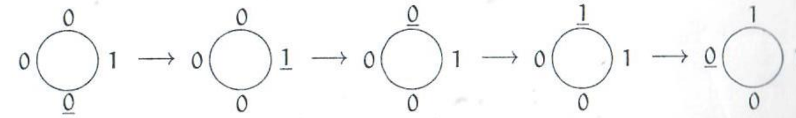
۲ ۹۴ دور یک دایره n رقم صفر و یک نوشته شده است و زیر یکی از این ارقام، یک خط تیره وجود دارد. در هر مرحله می‌توانیم یکی از دو عمل زیر را روی این رشته انجام دهیم:

- خط تیره را به زیر یکی از ارقام مجاور خط تیره منتقل کنیم.
- رقم بالای خط تیره را از صفر به یک و یا از یک به صفر تغییر دهیم.

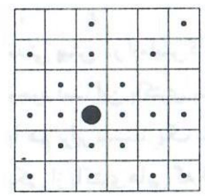
می‌خواهیم با استفاده از این عمل‌ها حالت اولیه‌ی رقم‌ها را به یک حالت نهایی‌ی داده شده تبدیل کنیم (حالت نهایی نیز شامل n رقم صفر و یک و یک خط تیره زیر یکی از آن‌ها است). کم‌ترین تعداد اعمالی را به دست آورید که بتوان مطمئن بود با این تعداد عمل از هر حالت اولیه می‌توان به هر حالت نهایی‌ی داده شده رسید و آن را ثابت کنید.

مثال زیر نمونه‌یی از تبدیل دو حالت اولیه و حالت نهایی‌ی داده شده در 4 مرحله است (در این مثال $n = 4$ است).





۳ ۹۵ یک جدول $n \times n$ با k مهره روی خانه‌های قطر اصلی‌ی آن داده شده است. قطر اصلی قطری است که گوشه‌ی چپ-بالا را به گوشه‌ی راست-پایین متصل می‌کند. هم چنین دو خانه‌ی جدول روی یک قطر فرعی اند اگر قدر مطلق تفاضل شماره‌ی ستون آن دو برابر باشد. هر مهره خانه‌هایی از جدول را تهدید می‌کند که با خانه‌ی آن در یک سطر، در یک ستون، یا در یک قطر فرعی قرار گیرد. به عنوان مثال در شکل زیر دایره‌ی سیاه یک مهره است و نقاط نشان دهنده‌ی خانه‌هایی هستند که توسط این مهره تهدید می‌شوند.



می‌دانیم که این k مهره همه‌ی خانه‌های جدول را تهدید می‌کنند. ثابت کنید $k \geqslant \lfloor (2n-1)/3 \rfloor$ (منظور از $\lfloor x \rfloor$، بزرگ‌ترین عدد کوچک‌تر یا مساوی‌ی x است).

۴ ۹۶ جدول A به اندازه‌ی $n \times 1$ که $n = 2^k$، داده شده است. اعداد 1 تا n را به ترتیب دل‌خواهی در جدول می‌نویسیم و عمل زیر را $2k$ بار روی آن اجرا می‌کنیم.

- برای مقادیر i به ترتیب 1 تا n، اگر مقدار خانه‌ی iام جدول s باشد، مقدار خانه‌ی sم جدول را در خانه‌ی iم بنویس.

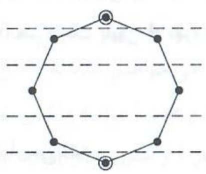
ثابت کنید پس از آن، ادامه‌ی انجام عمل فوق، تغییری در محتوای جدول نمی‌دهد.
به عنوان نمونه در زیر روند تغییر یک جدول 4×1 در طول اجرای عملیات آمده است:

$$(2341) \to (3413) \to (1311) \to (1111)$$

پاسخ‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم نهمین المپیاد

۱ باکتری‌هایی را که از نسل A باشند، نواده‌های A و A را نیای آن‌ها می‌نامیم. هم‌چنین دو باکتری‌ی به دست آمده را از A، فرزندان A نام می‌گذاریم. مجموعه‌ی نیاکانی را که بیش از $2k$ نواده در میان $3k$ باکتری دارند، در نظر می‌گیریم. این مجموعه تهی نیست. (چه‌را؟) هم‌چنین این مجموعه متناهی است. پس از این مجموعه آن را که کم‌ترین شمار نوادگان را دارد، برمی‌گزینیم. هیچ یک از دو فرزند این باکتری بیش از $2k$ نواده ندارد. (چه‌را؟) جز این دست پایین یکی از این دو فرزند دست پایین k نواده دارد. (چه‌را؟)

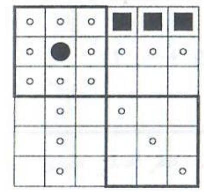
۲ اگر همه‌ی عددها نیاز به تغییر داشته باشند، به n عمل برای تغییر آن‌ها نیاز است. گیریم در آغاز در رقم مشخص شده‌ی پایینی و در پایان باید در رقم مشخص شده‌ی بالای باشیم.



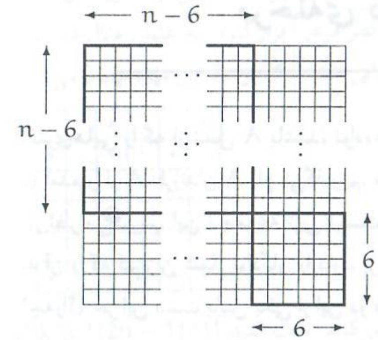
در حرکت برای رسیدن به حالت پایانی با هر یک از خط‌چین‌ها فرد بار برخورد خواهیم داشت. (چه‌را؟) دست بالا در یکی از خط‌چین‌ها شمار برخوردها می‌تواند برابر 1 باشد. (چه‌را؟) پس برای n زوج در این حالت به روشنی به $n + 3n/2 - 2$ گام نیاز است. برای n فرد نیز کمینه‌ی شمار گام‌ها به روشی همانند به دست می‌آید. (چه‌گونه؟) از سویی دیگر به روشنی شمار گام‌های $n + 3\lfloor n/2 \rfloor - 2$ برای رسیدن از هر گونه به هر گونه‌یی بس است.

۳ استقرا را روی n با گام 6تایی به کار می‌بندیم. نشان دادن درستی‌ی حکم برای پایه‌های $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ چندان سخت نیست. نشان می‌دهیم برای $n = 6$ به دست پایین 4 مهره نیاز است.

مهره‌های درون هر یک از 3×3های نشان داده شده هیچ خانه‌ی ناقطری‌یی را از 3×3ی دیگر تهدید نمی‌کند. اگر در یکی از 3×3ها، برای نمونه بالایی، تنها 1 مهره باشد، این مهره باید در خانه‌ی میانی گذارده شود تا همه‌ی خانه‌های آن 3×3 تهدید گردند. به این سان برای تهدید خانه‌های ■ به دست پایین 3 مهره در 3×3ی پایینی نیاز هست. پس برای تهدید همه‌ی خانه‌های یک جدول 6×6 دست پایین 4 مهره نیاز می‌گردد.



گیریم $n \geqslant 6$. از جدول $n \times n$ دو زیرجدول $(n-6) \times (n-6)$ و 6×6 را به گونه‌ی زیر جدا می‌کنیم.



مهره‌های یک زیرجدول هیچ یک از خانه‌های ناقطری‌ی زیرجدول دیگر را تهدید نمی‌کنند. بر پایه‌ی فرض استقرا به دست پایین $\lfloor (2(n-6)-1)/3 \rfloor$ مهره در زیرجدول $(n-6) \times (n-6)$ نیاز هست. در زیرجدول 6×6 هم دست پایین 4 مهره می‌خواهیم. پس برای تهدید همه‌ی خانه‌های جدول $n \times n$ به دست پایین

$$\left\lfloor \frac{2(n-6)-1}{3} \right\rfloor + 4 = \left\lfloor \frac{2n-1}{3} \right\rfloor$$

مهره نیاز می‌باشد.

۴ هر خانه‌ی i را گرهی گرفته، گره i را با یالی سودار به گره $A[i]$ می‌پیوندیم. پس به گرافی سودار می‌رسیم که در آن هر گره درجه‌ی خروجی‌ی 1 دارد.

دورهای موجود را در این گراف در نظر می‌گیریم. در هر گام از اجرای عمل گفته شده هر دور به دوری جدید بدل می‌شود. از هر دو گره کنار هم دور پیشین دست بالا یکی در دور جدید شرکت می‌کند. (چه‌را؟) هم‌چنین گره‌های هر دور جدید، همگی، از برای یکی از دورهای پیشین می‌باشند. (چه‌را؟) پس درازای دورهای درازتر از 1 در هر گام دست پایین نیمی کاهش می‌یابد. به این سان پس از k گام بزرگ‌ترین درازای دورها از بیشینه‌ی ممکن $n = 2^k$ به 1 می‌رسد. از این رو پس از گام kم دورها تنها می‌توانند دورهایی به درازای 1 یا لوپ‌ها باشند.

مسیرهای موجود را در گراف پس از گام kم در نظر می‌گیریم. با استدلالی همانند درازای مسیرهای درازتر از 1 در هر گام دست پایین نیمی کاهش می‌یابد. بر این سان پس از گام $2k$م دور یا مسیری با درازای بیش از 1 بر جای نمی‌ماند. جدول به پای‌داری رسیده است. (چه‌را؟)

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم نهمین المپیاد

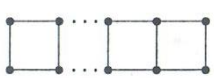
۵ ۹۷ یک مدرسه، سه تالار اجتماع A، B، و C دارد. یک روز، همه‌ی دانش‌آموزان در تالار A جمع شدند و معلوم شد هر دانش‌آموز لا اقل $s + t$ نفر را می‌شناسد. بعد از این، تعدادی از دانش‌آموزان به تالار B و تعدادی به تالار C رفتند. می‌دانیم که در تالار B هر نفر لا اقل s نفر را در هم‌آن تالار می‌شناسد و در تالار C نیز هر نفر حد اقل t نفر را در هم‌آن تالار می‌شناسد. ثابت کنید افرادی که در تالار A مانده اند را می‌توان به گونه‌یی بین دو تالار B و C تقسیم کرد، به طوری که بعد از تقسیم باز هم هر نفر در تالار B لا اقل s نفر از افراد هم‌آن تالار و هر نفر در تالار C لا اقل t نفر از افراد هم‌آن تالار را بشناسد (فرض کنید آشنایی یک رابطه‌ی دوطرفه است، یعنی اگر a شخص b را بشناسد b نیز a را می‌شناسد).

۶ ۹۸ یک جدول $n \times n$، شامل اعداد طبیعی و یک ماشین مقایسه‌گر در اختیار داریم. می‌دانیم در این جدول، اعداد در هر سطر و در هر ستون به صورت اکیدن صعودی مرتب شده اند. می‌خواهیم عدد k را در جدول جست و جو کنیم. برای این کار در هر مرحله، می‌توانیم یک کارت شامل دو عدد i و j به ماشین بدهیم و ماشین با گرفتن این کارت به ما پاسخ می‌دهد که عددی که در خانه‌ی سطر i و ستون j قرار دارد، بزرگ‌تر، کوچک‌تر، یا مساوی‌ی k است. روشی ارایه دهید که با حد اکثر $2n - 1$ کارت ورودی مشخص کند که k در این جدول وجود دارد یا نه؛ و در صورت وجود k، جای آن را در جدول مشخص کند.

روش خود را با پاسخ به سوالات زیر بیان کنید و درستی‌ی آن را ثابت کنید:

- با چه کارتی شروع می‌کنید؟
- بعد از دادن هر کارت و با توجه به جوابی که ماشین می‌دهد، چه کارتی را به‌ماشین می‌دهید؟

۷ ۹۹ شکل زیر شامل $2n$ دایره است که به وسیله‌ی $3n - 2$ پاره‌خط به یک‌دیگر متصل شده اند.



می‌خواهیم یکی از دایره‌ها را انتخاب کنیم و با شروع از آن و حرکت روی پاره‌خط‌ها، از همه‌ی دایره‌ها بگذریم، و در یک دایره (غیر از دایره‌ی اول) کار خود را خاتمه دهیم، به طوری که در طول حرکت هر دایره را

دقیقن یک بار ملاقات کنیم. به عنوان نمونه اگر n برابر 6 باشد، شکل زیر یکی از مسیرهای ممکن را نشان می‌دهد. ثابت کنید تعداد مسیرهایی که در شرط‌های گفته شده صدق می‌کنند برابر $n^2 - n + 2$ است.

۸ ۱۰۰ n نفر با شماره‌های 1 تا n $(n > 1)$ دور میزی نشسته اند و هرکدام k مهره در اختیار دارند. از نفر اول بازی‌ی زیر را شروع می‌کنیم. نفر اول مهره‌ی خود را به نفر دوم می‌دهد و از این به بعد هر نفر که از نفر قبلی‌ی خود یک مهره دریافت کرده باشد دو مهره به نفر بعدی‌ی خود می‌دهد و اگر دو مهره دریافت کرده باشد، یک مهره به نفر بعدی می‌دهد. در این بازی منظور از نفر بعدی، نزدیک‌ترین فرد در جهت عقربه‌های ساعت است. به محض آن که فردی مهره‌های‌ش را از دست بدهد از دور میز کنار می رود. مثلن اگر $k = 1$ باشد، در ابتدای بازی نفر 1 و 2 از دور خارج می‌شوند.

الف ثابت کنید اگر $k > 1$ و n توانی از 2 باشد، بازی پایان می‌پذیرد.

ب ثابت کنید اگر $k = 1$ باشد، بازی تنها در صورتی پایان می‌یابد که $n - 1$ یا $n - 2$ توانی از 2 باشد.

پاسخ‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم نهمین المپیاد

۵ همه‌ی کسانی را که دست پایین s نفر را در B می‌شناسند، به تالار B می‌بریم. سپس همه‌ی کسانی را که دست پایین t نفر را در تالار C می‌شناسند، به C می‌بریم. هر یک از افراد مانده کم‌تر از t آشنا در C دارند. پس در B بیش از s تن را می‌شناسند. همه‌ی اینان را به B می‌بریم.

۶ به کمک استقرا روی $p + q$ نشان می‌دهیم در هر جدول $p \times q$ با ویژگی‌ی گفته شده در سطرها و ستون‌ها می‌توان با دست بالا $p + q - 1$ کارت به خواسته رسید. درستی‌ی پایه‌ی $p + q = 2$ روشن است. کارت $(1, q)$ را به ماشین می‌دهیم. (می‌توان کارت $(p, 1)$ را نیز به کار برد.) اگر عدد این خانه برابر k بود، کار انجام شده است. اگر این عدد بزرگ‌تر از k بود، هیچ یک از عددهای ستون qم نمی‌توانند برابر با k باشند. پس با کنار گذاشتن این ستون اگر $q > 1$، به جدولی $p \times (q - 1)$ می‌رسیم. بر پایه‌ی فرض استقرا در این جدول دست بالا $p + q - 2$ کارت را باید آزمود. پس روی هم با دست بالا $1 + p + q - 2$ گام به پاسخ رسیده ایم. اگر $q = 1$ نیز کار پایان یافته است. در حالتی که عدد آزموده شده کوچک‌تر از k است نیز به روشی مشابه به جدولی $(p - 1) \times q$ می‌رسیم و به سادگی کار ادامه می‌یابد.

۷ گره‌های ته مسیر تنها در ستون‌های 1م و nم می‌توانند هم‌ستون باشند. (چه‌را؟) 2 گونه در این حالت هست. گیریم یکی از نقطه‌ها در ستون p و دیگری در ستون q باشد و $p \neq q$. روشن است که اگر داشته باشیم $p \equiv q \pmod 2$، ته‌های مسیر، ناهم‌سطر و اگر $p \not\equiv q \pmod 2$، ته‌های مسیر، هم‌سطر هستند. (چه‌را؟) پس با گزینش دو ستون p و q که $p \neq q$، 2 گونه گزینش برای ته‌های مسیر هست. با مشخص کردن ته‌های مسیر با شرط‌های بالا نیز مسیر به گونه‌یی یک‌تا به دست می‌آید. (چه‌را؟) پس روی هم $2 + 2\binom{n}{2}$ مسیر به گونه‌ی گفته شده هست.

۸ در بیان مساله می‌بایست گفته شود "بازی‌کن یکم یکی از مهره‌های خود ...".

الف گیریم $n = 2^m$. استقرا را روی m به کار می‌بندیم. درستی‌ی پایه‌ی $m = 0$ روشن است. گیریم $m > 0$. با انجام یک چرخه از بازی همه‌ی بازی‌کن‌ها با شماره‌ی فرد $k + 1$ و همه‌ی بازی‌کن‌ها با

شماره‌ی زوج $k-1$ مهره خواهند داشت. هم‌چنین بازی به هم‌آن گونه‌ی آغازی با پخش یک مهره از بازی‌کن یکم ادامه می‌یابد. پس، پس از انجام k چرخه همه‌ی بازی‌کن‌ها با شماره‌ی زوج دارای 0 مهره شده، کنار می‌روند و بازی‌کن‌های فرد با $2k$ مهره بازی را ادامه می‌دهند. به این سان به 2^{m-1} بازی‌کن رسیده ایم و بر پایه‌ی فرض استقرا بازی‌ی آنان پایان می‌یابد.

ب گیریم $n = 2^m o$ که o عدد فردی بزرگ‌تر از 1 است. هم‌چنین گیریم بازی‌کن یکم k_1 و دیگر بازی‌کن‌ها k_2 مهره داشته باشند و $k_1, k_2 > 1$. پس از k_2 چرخه به $2^{m-1}o$ بازی‌کن که یکمی $k_1 + k_2$ و دیگران $2k_2$ مهره دارند، می‌رسیم. به هم‌این سان پس از mk_2 چرخه، o بازی‌کن که یکمی $k_1 + (2^m - 1)k_2$ و دیگران $2^m k_2$ مهره دارند، باز خواهند ماند. اکنون پس از پایان هر دو چرخه وضعیت به گونه‌ی پیشین درمی‌آید و بازی تمام شدنی نیست. به این سان لزوم توان 2 بودن n در قسمت پیشین نیز نشان داده شد؛ باید $o = 1$ تا بازی پایان یابد.

پس از یک، یا یک گام کم‌تر از یک چرخه بازی‌کن یکم و بازی‌کن‌ها با شماره‌های زوج کنار رفته، به $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ بازی‌کن که یکمی 4 یا 3 و دیگران 2 مهره دارند، می‌رسیم. بر پایه‌ی گفته‌های بالا باید $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ توانی از 2 باشد تا بازی پایان پذیرد: $n-1$ یا $n-2$ توانی از 2 است.

دهمین المپیاد کامپیوتر

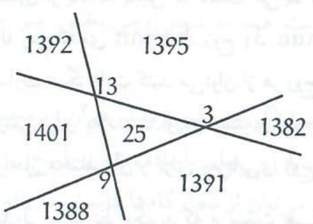
مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم صبح ۱۳۷۹/۲/۲۱، و نوبت دوم عصر ۱۳۷۹/۲/۲۱ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۵، و برای آزمون نوبت دوم ۵ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ با نام "ناحیه‌ها" دارای 10، مساله‌ی ۲ با نام "چراغ‌ها" دارای 10، مساله‌ی ۳ با نام "رمزیابی" دارای 15، مساله‌ی ۴ با نام "جدول عجیب" دارای 15، مساله‌ی ۵ با نام "قیچی‌ی شترنجی" دارای 10، مساله‌ی ۶ با نام "نقشه‌های درخت‌گونه" دارای 10، مساله‌ی ۷ با نام "مرتب‌سازی" دارای 15، و مساله‌ی ۸ با نام "بازی‌ی سنگ‌ریزه‌ها" دارای 15 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم دهمین المپیاد

۱ ۱۰۲ n خط روی صفحه داده شده اند، به طوری که هیچ دو خطی موازی و هیچ سه خطی هم‌رس نیستند (به عبارت دیگر، هر دو خط دل‌خواه یک نقطه‌ی تلاقی‌ی منحصر به فرد دارند). روی هر نقطه‌ی تلاقی یک عدد دل‌خواه نوشته شده است. این n خط صفحه را به تعدادی ناحیه تقسیم می‌کنند که بعضی از آن‌ها بسته و بعضی باز هستند. به هر ناحیه‌ی بسته یا باز یک عدد نسبت می‌دهیم که از مجموع اعداد نقاط دور آن ناحیه به دست می‌آید. برای ناحیه‌های باز عدد 1379 را نیز به عدد محاسبه شده اضافه می‌کنیم. شکل زیر یک مثال برای $n = 3$ است. در این مثال اعداد روی نقاط تقاطع ۹، 13، و 3 هستند.



ثابت کنید اگر n مضرب 4 باشد، آن گاه همه‌ی اعداد ناحیه‌ها نمی‌توانند فرد باشند.

۲ ۱۰۳ روی یک خط، n چراغ با شماره‌های 1 تا n قرار دارند که تعدادی از آن‌ها خاموش و بقیه روشن هستند. دو نفر به نام‌های A و B این بازی را با هم انجام می‌دهند. از ابتدا و در تمام مراحل بازی، چشم B بسته است و او وضعیت لامپ‌ها را نمی‌داند. در هر مرحله از بازی، B مجموعه‌یی از اعداد 1 تا n را انتخاب می‌کند و به A می‌گوید. A لامپ‌هایی که شماره‌ی آن‌ها در آن مجموعه است را تغییر وضعیت می‌دهد؛ یعنی اگر لامپ خاموش بود، آن را روشن و اگر روشن بود آن را خاموش می‌کند. مثلن اگر 3 لامپ داشته باشیم و لامپ‌های 1 و 3 خاموش باشند و لامپ 2 روشن باشد و B مجموعه‌ی $\{1,2\}$ را انتخاب کند، در مرحله‌ی بعد لامپ 1 روشن و لامپ‌های 2 و 3 خاموش خواهند شد.

در هر مرحله‌یی که تمام لامپ‌ها خاموش شوند بازی به نفع B تمام می‌شود. مثلن اگر $n = 2$ و B به ترتیب مجموعه‌های $\{1,2\}$، $\{1\}$، $\{1,2\}$ را انتخاب کند، به هر ترتیب B برنده‌ی بازی خواهد شد. ثابت کنید

برای هر n، B می‌تواند طوری بازی کند که ببرد. یعنی می‌تواند دنباله‌یی از زیرمجموعه‌های $\{1,2,\dots,n\}$ را انتخاب کند که برای هر وضعیت اولیه‌ی دل‌خواه از چراغ‌ها در حین انجام عمل به جایی برسیم که همه‌ی چراغ‌ها خاموش باشند.

۳ ۱۰۳ رشته‌ی S را با n حرف در نظر بگیرید. مجموعه‌ی جای‌گشت‌های دوری‌ی S به نام R را به صورت $R=\{S_1,S_2,\dots,S_n\}$ نشان می دهیم به طوری که $S_1=S$ و S_{i+1} $(1\leqslant i<n)$ را از S_i به این شرح به دست می‌آوریم: حرف انتهایی‌ی S_i را برمی‌داریم و در اول رشته‌ی باقی مانده قرار می‌دهیم.

یک روش رمز کردن رشته‌ی S به این صورت است: رشته‌های S_1 تا S_n را به ترتیب الف‌بایی مرتب می‌کنیم و رشته‌های مرتب شده را به ترتیب در سطرهای یک جدول $n\times n$ قرار می‌دهیم. مثلن جدول متناظر رشته‌ی $banan$ مطابق شکل زیر است:

$$\begin{array}{lllllll} S_1 & = & b\ a\ n\ a\ n & & a\ n\ a\ n\ b \\ S_2 & = & n\ b\ a\ n\ a & & a\ n\ b\ a\ n \\ S_3 & = & a\ n\ b\ a\ n & \Rightarrow & b\ a\ n\ a\ n \\ S_4 & = & n\ a\ n\ b\ a & & n\ a\ n\ b\ a \\ S_5 & = & a\ n\ a\ n\ b & & n\ b\ a\ n\ a \end{array}$$

رمز شده‌ی رشته‌ی S از دو قسمت تشکیل شده است: قسمت اول رشته‌یی است که از حروف ستون آخر جدول از بالا به پایین به دست می‌آید و قسمت دوم شماره‌ی سطر S در جدول است. با توجه به جدول بالا رمز شده‌ی $banan$، زوج $(bnnaa,3)$ است. ثابت کنید این روش رمز کردن برگشت‌پذیر است. به عبارت دیگر ثابت کنید می‌توان از هر زوج رمز شده‌ی متناظر یک رشته، به رشته‌ی منحصر به فرد اولیه رسید. روشی برای به دست آوردن رشته‌ی اولیه بیان کنید. روش خود را به صورت دقیق و گام به گام بیان کنید و مراحل مختلف آن را برای رمزیابی‌ی زوج $(sfaraf,6)$ نشان دهید.

۴ ۱۰۵ جدولی را در نظر بگیرید که از سمت چپ، راست و پایین نامتناهی است و فقط از طرف بالا محدود می‌باشد. بالاترین سطر جدول سطر شماره‌ی 1 است و سطرها به طرف پایین شماره‌گذاری می‌شوند. در سطر اول در یک خانه عدد 1 و در بقیه‌ی خانه‌های آن عدد صفر نوشته شده است. در سطرهای بعد یک خانه مقدار 1 دارد اگر و فقط اگر دقیقن یکی از خانه‌ی چپ و راست خانه‌ی بالای آن 1 باشد، در غیر این صورت مقدارش صفر خواهد بود. در مثال زیر چند سطر اول این جدول نوشته شده است.

سطر اول	…	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	…
سطر دوم	…	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	…
سطر سوم	…	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	…
سطر چهارم	…	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	…
سطر پنجم	…	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	…
سطر ششم	…	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	…

سطر 1379م این جدول حاوی‌ی چند عدد 1 است؟ روش محاسبه‌ی خود را دقیقن بیان و اثبات کنید.

پاسخ‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم دهمین المپیاد

۱ گیریم $4\backslash n$ و همه‌ی بخش‌ها عددی فرد دارند. شمار بخش‌ها برابر

$$R_n=\binom{n}{2}+\binom{n}{1}+\binom{n}{0}=\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

است که از این شمار $U_n=2n$ تا بی‌کران هستند. به روشنی $R_n\in\mathbb{O}$:

$$n=4m \implies R_n=2m(4m+1)+1=2k+1\in\mathbb{O}.$$

به این سان مجموع عددهای بخش‌ها، مجموع شماری فرد عدد فرد است و فرد خواهد بود. از سویی دیگر عدد هر نقطه‌ی برخورد در 4 بخش، و 1379 در $2n$ بخش جمع شده است: همه در شمار زوجی بخش. پس مجموع عددهای بخش‌ها باید زوج باشد. تناقض!

۲ B در هر گام یکی از زیرمجموعه‌های $\mathbb{N}_n$ را به A می‌دهد. پس اگر به پاسخ نرسید، هم‌آن زیرمجموعه را دوباره به A می‌دهد تا وضعیت لامپ‌ها به گونه‌ی آغازین درآید. به این سان تا یافت شدن پاسخ، بررسی‌ی زیرمجموعه‌ها ادامه می‌یابد: دست بالا $2^{n+1}-1$ گام. به سادگی می‌توان از شمار گام‌ها کاست. در واقع مساله خواسته‌یی دیگر را در نظر داشته است که بسیار ساده مطرح گشت.•

۳ ستون پایانی داده شده است. پس آن را می‌نویسیم. ستون یکم نیز مرتب شده‌ی نویسه‌های ستون پایانی است. برای نمونه در جفت $(safaraf,6)$ به گونه‌ی زیر می‌رسیم.

$$\begin{array}{ccccccc} a & - & - & - & - & s \\ a & - & - & - & - & f \\ f & - & - & - & - & a \\ f & - & - & - & - & r \\ r & - & - & - & - & a \\ s & - & - & - & - & f \end{array}$$

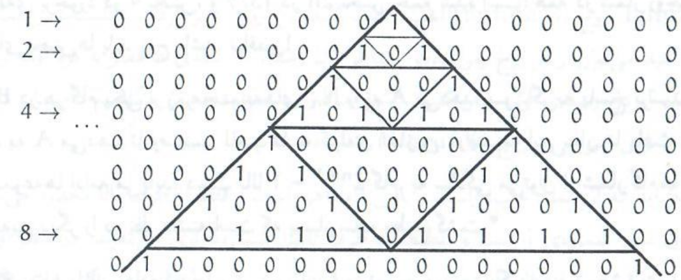
تا کنون مشخص گردید در جای‌گشت دوری پس از هر نویسه کدام نویسه آمده است. به بیان دیگر همه‌ی زیرترتیب‌های دوتایی‌ی جای‌گشت دوری را یافتیم. برای نمونه در جفت گفته شده زیرترتیب‌های دوتایی sa، fa، af، rf، ar، fs هست.

با توجه به ترتیب‌های به دست آمده پس از هر نویسه‌ی آغازی یک یا چند نویسه را می‌توان داشت. برای نمونه در جفت داده شده پس از a با توجه به شش زیرترتیب به دست آمده f و r را می‌توان داشت. به روشنی با توجه به ترتیب الف‌بایی می‌توان عضوها را به ترتیب جای‌گذاری نمود.

af	–	–	–	s
ar	–	–	–	f
fa	–	–	–	a
fs	–	–	–	r
rf	–	–	–	a
sa	–	–	–	f

می‌خواهیم به پر کردن ستون سوم بپردازیم. با پر شدن ستون‌های پایانی، یکم، و دوم همه‌ی زیرترتیب‌های سه‌تایی جای‌گشت به دست آمده اند. برای نمونه در جفت داده شده زیرترتیب‌های saf، far، afa، rfs، arf، fsa هست. به این سان با توجه به زیرترتیب‌های سه‌تایی به دست آمده و پر بودن ستون‌های یکم و دوم، برای عنصرهای سوم. سطرها مقدارهایی به دست می‌آید. باز اگر در سطرهایی بیش از یک گزینه بود، ترتیب الف‌بایی چه‌گونگی‌ی پر شدن را مشخص می‌کند. پس به ترتیب‌هایی چهارتایی می‌رسیم. به همین شیوه پر کردن ستون‌ها ادامه می‌یابد.

۴ شماری چند از دیگر سطرهای جدول را می‌نویسیم.



به این سان این ساختار سه‌گوشی به روشنی پس از هر سطر، توان 2 تکرار می‌شود. شمار 1ها را در سطر n با O_n نشان می‌دهیم. پس برای $2^{m-1} < n \leqslant 2^m$ که $m > 0$، با بهره‌گیری از ساختار بالا داریم $O_n = 2O_{n-2^m}$. (چه‌را؟) به بیان دیگر برای هر n که $n > 1$، داریم $O_n = 2O_{n-2^{\lfloor \lg n \rfloor}}$. اندازه‌های کرانه‌یی $O_0 = O_1 = 1$ را نیز داریم. پس داریم

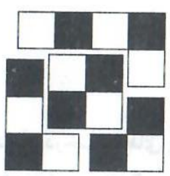
$$1379 = (10101100011)_2,$$

$$O_{(10101100011)_2} = 2^1 O_{(101100011)_2} = 2^2 O_{(1100011)_2} = 2^5 O_{(1)_2} = 2^5.$$

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم دهمین المپیاد

۵ ۱۰۶ قیچی‌ی شترنجی ماشینی است که یک صفحه‌ی شترنجی را فقط روی خطوط جدول برش می‌دهد و مقدار کل برش را در حافظه‌ی خود نگه می‌دارد (طول برش). برای مثال در شکل زیر، یک صفحه‌ی 4×4 به وسیله‌ی این ماشین به چهار قطعه به اندازه‌های 3، 4، 4 و 5 تقسیم شده است. طول این برش برابر 11 می‌باشد.



یک صفحه‌ی شترنجی‌ی 8×7 داده شده است. می‌خواهیم با قیچی‌ی شترنجی آن را به تعدادی قطعه تقسیم کنیم به طوری که اندازه‌ی هر قطعه حد اکثر 5 باشد و طول برش کمینه شود.

با انجام برش‌های مناسب، کم‌ترین طول برش را به دست آورید. نحوه‌ی برش خود را با رسم شکل نشان دهید و ثابت کنید که مجموع طول برش به دست آمده کمینه است.

۶ ۱۰۷ یک نقشه شامل تعدادی شهر و جاده است به طوری که

- هر جاده فقط دو تا از شهرها را به هم متصل می‌کند.
- بین هر دو شهر حد اکثر یک جاده کشیده شده است.

یک نقشه درخت‌گونه است اگر سه شرط زیر در آن برقرار باشد.

۱. از هر شهر آن بتوان به هر شهر دیگر از طریق جاده‌ها مسافرت کرد.

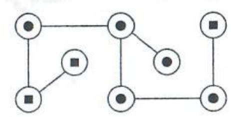
۲. در صورت حذف هر کدام از جاده‌های نقشه، مسافرت بین دو شهر دو سر آن جاده از طریق جاده‌های دیگر ناممکن شود.

۳. تعداد جاده‌ها دقیقن یک واحد کم‌تر از تعداد شهرها باشد.

نقشه‌ی زیر درخت‌گونه نیست و فقط در آن شرط ۳ رعایت شده است، چون مسافرت از شهر 1 به شهر 3 ممکن نیست. البته در صورت حذف جاده‌ی بین شهرهای 3 و 4، مسافرت بین این دو شهر از طریق شهر 5 ممکن خواهد بود. نقشه‌ی صفحه‌ی بعد درخت‌گونه است.

ثابت شده است که اگر در یک نقشه دو شرط از سه شرط گفته شده درست باشد، نقشه درخت‌گونه است، و شرط دیگر هم در مورد آن صدق می‌کند. شما هم می‌توانید این مطلب را درست فرض کنید.

در یک نقشه یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از شهرها را درختچه می‌نامیم اگر بعد از حذف بقیه‌ی شهرها و جاده‌های متصل به شهرهای حذف شده از نقشه، نقشه‌ی حاصل درخت‌گونه شود. مثلن در نقشه‌ی زیر مجموعه‌ی شهرهایی که با دایره‌ی توپر نشانه‌گذاری شده اند یک درختچه است، در حالی که مجموعه‌ی شهرهایی که با مربع توپر نشانه‌گذاری شده اند درختچه نیست.



تعداد درختچه‌های یک نقشه را درجه‌ی استحکام آن نقشه می‌نامیم. بزرگ‌ترین درجه‌ی استحکام همه‌ی نقشه‌های درخت‌گونه با n شهر را به دست آورید.

۷ [۱۰۸] یک جدول $1 \times (n+1)$ را در نظر بگیرید که در آن اعداد 1 تا n هر کدام یک بار آمده است و یک خانه از آن هم خالی است. در هر جابه‌جایی می‌توانیم یک عدد جدول را به خانه‌ی خالی ببریم. هدف این است که با تکرار عمل جابه‌جایی در نهایت جدول مرتب شود. یک جدول مرتب شده است اگر در آن، برای هر $i < j$، عدد i قبل از j آمده باشد و خانه‌ی خالی هم در مکان $n+1$م قرار گرفته باشد (در حقیقت عدد i در خانه‌ی i قرار می‌گیرد). مثلن در شکل زیر، پس از 2 بار جابه‌جایی جدول مرتب شده است.

2		1	→		2	1	→	1	2	

حد اکثر تعداد عمل جابه‌جایی که لازم است تا بتوان هر حالت ممکن از جدول $1 \times (n+1)$ را مرتب کرد را بر حسب n به دست آورید و ادعای خود را ثابت کنید. برای مثال اگر $n = 2$، هر حالت ممکن را می‌توان با حد اکثر 2 بار جابه‌جایی مرتب کرد.

۸ [۱۰۹] یک دسته با n سنگ‌ریزه داده شده است. دو نفر با هم این بازی را انجام می‌دهند: هر کس در نوبت خود باید تمام دسته‌های موجود با بیش از یک سنگ‌ریزه را به دل‌خواه به دو دسته‌ی ناتهی تقسیم کند. هر کس

در نوبت خود نتواند حرکتی انجام دهد بازنده است (یعنی همه‌ی دسته‌ها تنها یک سنگ‌ریزه داشته باشد) و فرد دیگر برنده‌ی بازی است.

به عنوان مثال فرض کنید $n = 5$. در این صورت نفر اول می‌تواند این دسته را به $(1,4)$ یا $(2,3)$ تقسیم کند. فرض کنید حرکت $(2,3)$ را انتخاب کند. نفر دوم در هر صورت باید دسته‌ی 2تایی را به دو دسته‌ی 1تایی تقسیم کند و دسته‌ی 3تایی را باید به دو دسته‌ی 2تایی و 1تایی تقسیم کند. در حرکت بعدی نفر اول بازی را می‌برد.

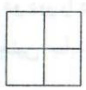
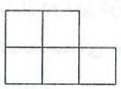
به ازای چه nهایی نفر اول و به ازای چه nهایی نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که حتمن برنده شود؟

پاسخ‌های نوبت دوم
مرحله‌ی دوم دهمین المپیاد

۵ ﴿ گیریم صفحه‌ی شترنجی را به n تکه با مساحت‌های s_1، s_2، …، s_n و محیط‌های $2p_1$، $2p_2$، …، $2p_n$ افراز کرده ایم. به روشنی اگر از مجموع پیرامون‌های تکه‌ها پیرامون صفحه‌ی 8×7 را که برابر با $2(7+8)$ است، بکاهیم، دو برابر درازای برش، L، به دست می‌آید. پس درازای برش برابر

$$L = \frac{(2p_1 + 2p_2 + \cdots + 2p_n) - 2(7+8)}{2} = \sum_{i=1}^{n} p_i - 15$$

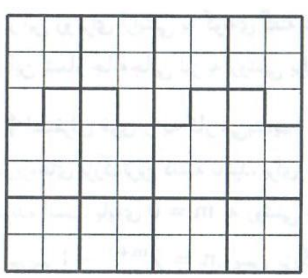
است. به این سان برای کمینه کردن L باید $\sum_i p_i$ را کمینه کرد. این در حالی است که $\sum_{i=1}^{n} s_i = 7 \cdot 8$ و برای هر i، $s_i \leqslant 5$. می‌توان بررسی کرد تکه‌های

 ، 

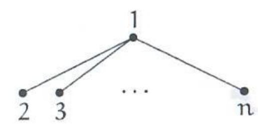
کوچک‌ترین نسبت p/s را در میان تکه‌ها با مساحت نابزرگ‌تر از 5 دارند. برای این دو شکل داریم $p/s = 4/4 = 5/5 = 1$. پس برای هر تکه از برش‌ها داریم $p_i \geqslant s_i$.

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i - 15 \geqslant \sum_{i=1}^{n} s_i - 15 = 56 - 15 = 41$$

شکل زیر نیز کمینه‌ی درازای برش 41 را به دست می‌دهد.



۶ ۞ هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از جاده‌ها دست بالا یک درخت‌چه را به دست می‌دهد. (هیچ دو درخت‌چه‌ی گوناگونی دارای مجموعه‌ی جاده‌های یک‌سان نیستند.) از این رو دست بالا $2^{n-1}-1$ درخت‌چه با دست پایین یک جاده هست. هم‌چنین n درخت‌چه‌ی بی‌جاده داریم. به این سان بیشینه‌ی شمار درخت‌چه‌ها $2^{n-1}-1+n$ می‌باشد. در آرایش



نیز درست $2^{n-1}-1+n$ درخت‌چه هست. (چه‌را؟)

۷ ۞ ۸. پیش از همه گفتنی است متاسفانه صورت مساله اشکال دارد. برای $n=2$ تا 3 جابه‌جایی می‌تواند نیاز گردد.• در جای خالی $n+1$ را می‌انگاریم. پس در هر گام می‌توان یک عدد را با $n+1$ جا به جا کرد و در پایان هم باید همه‌ی عددها را مرتب شده در جدول داشت. گرافی سودار را بر این گونه می‌سازیم؛ عددهای 1 تا $n+1$ را گره‌های گراف گرفته، گره i را به گره j با یالی سودار می‌پیوندیم اگر عدد i در خانه‌ی j باشد. هر گره در این گراف درجه‌ی ورودی و درجه‌ی خروجی‌ی 1 دارد. پس گراف از شماری دور تشکیل شده است. گراف وضعیت پایانی باید از $n+1$ حلقه تشکیل شده باشد.

جابه‌جایی‌ی دو عدد که در یک دور هستند، آن دور را به دو دور جدید تبدیل می‌کند. (چه‌را؟) جابه‌جایی‌ی دو عدد از دو دور گوناگون نیز آن دو دور را در هم می‌آمیزد. (چه‌را؟) در هر گام دست بالا یکی از عددهای 1 تا n می‌تواند به خانه‌ی خود رود. هم‌چنین جابه‌جایی با $n+1$ انجام می‌گیرد. پس $n+1$ باید در دوری که آن عدد هست، باشد.

گیریم در آغاز هیچ حلقه‌یی جز شاید حلقه از $n+1$ به خودش نداریم و همه‌ی دورها نیز دورهایی دوتایی می‌باشند. (می‌توان چنین حالتی را داشت. چه‌گونه؟) پس روی هم $\lceil (n+1)/2\rceil$ حلقه و دور هست. هر دور که $n+1$ را در بر ندارند، سرانجام باید با حلقه یا دور شامل $n+1$ درآمیزد تا عددهای آن بتوانند جابه‌جا گردند. پس برای این منظور به دست پایین $\lceil (n+1)2\rceil - 1$ جابه‌جایی با $n+1$ نیاز است. هم‌چنین برای هر یک از عددهای 1 تا n دست پایین یک جابه‌جایی می‌خواهیم تا از دور شامل $n+1$ رها شده، یک حلقه تشکیل دهد. از این رو برای آرایشی به گونه‌ی گفته شده به دست پایین $\lceil (n-1)/2\rceil + n = \lfloor 3n/2\rfloor$ جابه‌جایی نیاز است. این شمار جابه‌جایی نیز به روشنی برای مرتب‌سازی‌ی این آرایش یا هر آرایش دیگر بس است.

۸ ۞ استقرای قوی را به کار می‌بندیم. هم‌چنین فرض استقرا را قوی می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر n شمار سنگ‌ریزه‌های بزرگ‌ترین دسته باشد، برای $n=2^m-1$ بازی‌کن دوم و برای $2^m \leqslant n < 2^{m+1}-1$ بازی‌کن یکم برنده است. پایه‌ی $m=0$ به روشنی برقرار است ولی این پایه کارآ نیست. پایه‌ی $m=1$ برقرار می‌باشد.

گیریم $n=2^{m+1}-1$. پس بزرگ‌ترین دسته‌یی که بازی‌کن یکم به دست می‌دهد، دست پایین

$\lceil (2^{m+1}-1)/2\rceil = 2^m$ و دست بالا $2^{m+1}-2$ سنگ‌ریزه دارد. از این رو برای شمار سنگ‌ریزه‌های بزرگ‌ترین دسته، n، پس از حرکت بازی‌کن یکم داریم $2^m \leqslant n < 2^{m+1}-1$. پس آغازگر بازی‌ی جدید و از این رو بازی‌کن دوم، بازی‌ی آغازین برنده است.

می‌انگاریم $2^{m+1} \leqslant n < 2^{m+2}-1$. بازی‌کن یکم یک دسته با $2^{m+1}-1$ سنگ و دسته‌هایی دیگر با شمار سنگ‌هایی نابزرگ‌تر از آن به دست می‌دهد. او می‌تواند چنین کند. از این رو در گام بازی‌کن دوم شمار سنگ‌ریزه‌های بزرگ‌ترین دسته $2^{m+1}-1$ است که منجر به باخت‌ش می‌شود.

یازدهمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم صبح ۱۳۸۵/۲/۱۲، و نوبت دوم صبح ۱۳۸۵/۲/۱۳ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۵، و برای آزمون نوبت دوم ۵ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ با نام "رساندن مهره" دارای 10، مساله‌ی ۲ با نام "ماتریس پرمغز" دارای 10، مساله‌ی ۳ با نام "پادگان نظامی" دارای 15 (5، 10)، مساله‌ی ۴ با نام "جای‌گشت‌های علامت‌دار" دارای 15، مساله‌ی ۵ با نام "مسیر کوتاه" دارای 10، مساله‌ی ۶ با نام "جدول جمعی" دارای 10 (2، 8)، مساله‌ی ۷ با نام "وزنه‌ها" دارای 15، و مساله‌ی ۸ با نام "استان‌ها" دارای 15 امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم یازدهمین المپیاد

۱ ۱۱۰ یک سطر نامتناهی از خانه‌های 1×1 با شماره‌های 1، 2، و ... داده شده است. در ابتدا دو مهره در خانه‌های 1 و 2 قرار دارند. در هر مرحله، یکی از دو مهره را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و اگر این مهره در خانه‌ی شماره‌ی i باشد، آن را i خانه‌ی خالی به جلو می‌بریم. یعنی در صورتی که مهره‌ی دیگر در خانه‌های $i+1$ تا $2i$ نباشد، آن را به خانه‌ی $2i$ و در غیر این صورت به خانه‌ی $2i+1$ می‌بریم.

ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n $(n > 2)$، می‌توان با انجام تعدادی حرکت یکی از مهره‌ها را به خانه‌ی nم برد.

۲ ۱۱۱ در ماتریس A با ابعاد $n \times n$، درایه‌ی واقع در سطر i و ستون j را a_{ij} می‌نامیم. ماتریس A را پرمغز است، اگر دو خاصیت زیر را داشته باشد:

- همه‌ی درایه‌های A برابر 0 یا 1 باشند.
- به ازای هر k سطر متمایز p_1، p_2، ...، و p_k، $(1 \leqslant k \leqslant n)$ حد اقل یک ستون j وجود داشته باشد به گونه‌یی که $a_{p_1 j} + a_{p_2 j} + \cdots + a_{p_k j}$ فرد باشد.

چند ماتریس $n \times n$ پرمغز وجود دارد؟

۳ ۱۱۲ در یک پادگان نظامی، n فرمان‌ده و n^2 سرباز حضور دارند. برای اجرای یک عملیات علیه دشمن، باید گروهی از همه‌ی فرمان‌ده‌ها و تعداد دل‌خواهی سرباز تشکیل شود. برای شناسایی‌ی افراد این گروه، به هر کدام از آن‌ها یک کد عملیاتی تخصیص داده می‌شود. کد هر فرد، یک عدد طبیعی است و کد هیچ دو نفری یک‌سان نیست. به خاطر مسایل امنیتی کدها با این شرط انتخاب می‌شوند: برای هر دو فرد A و B عضو گروه با کدهای a و b، عدد $a+b$ کد یکی دیگر از اعضای گروه است اگر و تنها اگر A و B هر دو فرمان‌ده باشند (توضیح آن که به غیر از اعضای گروه، به کسی کد داده نمی‌شود).

ا ثابت کنید برای هر n، می‌توان در پادگانی با شرایط فوق یک گروه انتخاب کرد و به اعضای آن کدهای درست نسبت داد.

ب نشان دهید در هر کدگذاری‌ی درست با $n \geqslant 4$ فرمان‌ده، 3 فرمان‌ده A، B، و C با کدهای a، b، و c وجود ندارند که $a + b = c$.

۴ یک جای‌گشت، یک ترتیب از اعداد 1، 2، ...، و n است. برای مثال $\langle 3,1,4,2,5\rangle$ جای‌گشتی از اعداد 1 تا 5 است. یک جای‌گشت علامت‌دار از روی یک جای‌گشت عادی به این شکل به دست می‌آید که صفر یا چند عدد آن جای‌گشت را منفی می‌کنیم. برای مثال $\langle -3,1,-4,-2,5\rangle$ جای‌گشتی علامت‌دار است. ۱۱۴

اگر $A = \langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ یک جای‌گشت علامت‌دار باشد، دوران (i,j) که در آن $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ آن را به جای‌گشت علامت‌دار زیر تبدیل می‌کند:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, -a_j, -a_{j-1}, \dots, -a_{i+1}, -a_i, a_{j+1}, \dots, a_n\rangle$$

برای مثال با انجام متوالی‌ی دوران‌های $(1,2)$، $(2,3)$، و $(1,2)$ روی جای‌گشت علامت‌دار $\langle 1,2,3\rangle$، به ترتیب جای‌گشت‌های علامت‌دار زیر به دست می‌آیند:

$$\langle 1,2,3\rangle \to \langle -2,-1,3\rangle \to \langle -2,-3,1\rangle \to \langle 3,2,1\rangle$$

ثابت کنید دست کم $n-1$ دوران برای تبدیل $\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ به $\langle a_n, a_{n-1}, \dots, a_1\rangle$ لازم است.

پاسخ‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم یازدهمین المپیاد

۱ ◈ استقرای قوی را به کار می‌گیریم. فرض استقرا را نیز قوی کرده، نشان می‌دهیم برای هر n می‌توان مهره با شماره‌ی بزرگ‌تر را در خانه‌ی n داشت. پایه‌ی $n = 2$ به روشنی برقرار است. می‌خواهیم با فرض درستی‌ی حکم برای $< n$ درستی‌ی حکم را برای n نشان دهیم. بر پایه‌ی فرض استقرا مهره با شماره‌ی بزرگ‌تر را در خانه‌ی $\lfloor n/2 \rfloor$ جای می‌دهیم. اگر n زوج باشد، با یک حرکت این مهره به خواسته رسیده ایم. برای n فرد مهره با شماره‌ی کوچک‌تر را تا جایی که برای نخستین بار از مهره‌ی دیگر جلو می‌افتد، حرکت می‌دهیم. این مهره در خانه‌یی با شماره‌ی دست بالا $2(\lfloor n/2 \rfloor - 1) + 1$ که $< n$، جای می‌گیرد. پس مهره‌ی دیگر به سادگی با یک حرکت به خانه‌ی n می‌رود.

۲ ◈◈ برآیند چند سطر را از 0 و 1 سطری جدید از 0 و 1 بر این سان تعریف می‌کنیم: یک درایه از سطر جدید برابر با یای انحصاری، یا مانده‌ی پیمانه‌ی 2ی جمع درایه‌های متناظر سطرهای آغازین است؛ اگر جمع درایه‌ها فرد بود، 1 و اگر زوج بود، 0 می‌باشد. برای نمونه برآیند یک سطر، خودش و برآیند هیچ سطر، یا یک سطر با خودش، سطر همه0 است.

با این تعریف شرط دوم از مساله به این که هیچ دسته‌ی ناتهی‌یی از سطرها برآیند 0 ندارد، تبدیل می‌شود. این شرط هم‌ارز این است که برآیندهای هیچ دو دسته‌ی نایک‌سانی از سطرها نمی‌توانند یک‌سان باشند. چه‌را؟ نتیجه شدن تغییر یافته‌ی شرط دوم از شرط کنونی ساده است. (چه‌گونه؟) گیریم دو دسته‌ی نایک‌سان برآیندهای یک‌سان به دست دهند. به این سان برآیند برآیندهای این دو دسته و در نتیجه برآیند سطرهای نامشترک این دو دسته که ناتهی است (چه‌را؟)، برابر 0 می‌باشد. (چه‌را؟)

m سطر را از یک ماتریس $n \times n$ به T_m شیوه با 0 و 1 پر کرده ایم به گونه‌یی که برآیندهای هیچ دو دسته‌ی نایک‌سانی یک‌سان نباشند. می‌خواهیم سطر $m + 1$ را پر کنیم. در حالت کلی 2^n شیوه برای ساختن سطر هست. این سطر نباید برآیند هیچ دسته‌یی از سطرهای پیشین باشد. پس، از آن جایی که هیچ دو دسته‌ی نایک‌سانی برآیندهایی یک‌سان ندارند، دست پایین 2^m روش از روش‌های ساخت سطر جدید کم می‌شود: برابر با شمار زیرمجموعه‌ها از m سطر.

همه‌ی $2^n - 2^m$ شیوه‌ی مانده، شیوه‌هایی قابل قبول هستند. چه‌را؟ اگر دسته‌یی از سطرها برآیند 0 داشته باشند، باید سطر جدید را هم در بر داشته باشند. (چه‌را؟) پس برآیند این سطرها با کنار گذاشتن سطر جدید با سطر جدید یک‌سان می‌شود که تناقض است. به این سان بازگشت

$$T_0 = 1,$$
$$T_{m+1} = (2^n - 2^m)T_m, \quad m \geqslant 0$$

به دست می‌آید. پاسخ خواسته شده به سادگی برابر با $T_n = \prod_{i=1}^{n}(2^n - 2^{i-1})$ است.

۳

ا ❖ کافی است شماره‌های فرمان‌دهان به گونه‌ی $4m+1$ و شماره‌های سربازان جمع دوبه‌دوی شماره‌های فرمان‌دهان که دست بالا $\binom{n}{2}$ تا و کم‌تر از n^2 است، باشند. به این سان اگر p و q کدهای دو فرمان‌ده و r و s کدهای دو سرباز باشند، $p \equiv q \equiv 1 \pmod 4$، $r \equiv s \equiv p+q \equiv 2 \pmod 4$، $p+r \equiv 3 \pmod 4$، و $r+s \equiv 0 \pmod 4$.

ب ❖❖ گیریم این گونه نباشد. بزرگ‌ترین کد فرمان‌ده c را به گونه‌ی $a+b=c$ که a و b کدهای دو فرمان‌ده باشند، برمی‌گزینیم. فرمان‌ده دیگر d هم هست. $c+d$ جمع دو کد فرمان‌ده و کد عضوی از گروه می‌باشد. از آن جایی که c بزرگ‌ترین گزینه‌ی جمع دو کد فرمان‌ده است، $a+(b+d)$، یا هم‌آن $c+d$، کد یک سرباز می‌باشد. $b+d$ نیز یکی از اعضای گروه است و از آن رو که $a+(b+d)$ کد یک عضو گروه می‌باشد، $e=b+d$ باید کد یک فرمان‌ده باشد. به این سان $c+e$ کد یک عضو گروه است. با نوشتن $c+e$ به گونه‌ی $b+(c+d)$ درمی‌یابیم b و $c+d$، هر دو، باید کدهای فرمان‌دهی باشند در حالی که $c+d$ کد یک سرباز بوده است. تناقض!

۴ ❖ می‌خواهیم جای‌گشت $\langle 1,2,\ldots,n\rangle$ را به $\langle n,\ldots,2,1\rangle$ تبدیل کنیم. s را شمار جفت عددهای کنار هم که عدد کوچک‌تر در سوی چپ است، می‌گیریم. در آغاز داریم $s=n-1$ و در پایان باید داشت $s=0$. در اجرای دوران (i,j) جفت‌های (a_m, a_{m+1}) برای $i \leqslant m < j$ به $(-a_{m+1}, -a_m)$ تبدیل می‌شوند. تبدیل این جفت‌ها اثری بر s ندارد. (چه‌را؟) تغییر s تنها در تبدیل جفت‌های (a_{i-1}, a_i) و (a_j, a_{j+1}) به $(a_{i-1}, -a_j)$ و $(-a_i, a_{j+1})$ رخ می‌دهد. ادعا می‌کنیم دست بالا 1 واحد از s کاسته شده است. اگر این گونه نباشد، باید داشت $a_{i-1} < a_i$، $a_j < a_{j+1}$، $a_{i-1} > -a_j$، و $-a_i > a_{j+1}$. در این صورت داریم

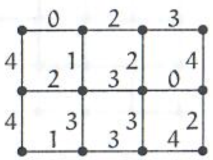
$$a_{i-1} < a_i < -a_{j+1} < -a_j < a_{i-1}$$

که با توجه به ویژگی‌ی تراگذری باید داشت $a_{i-1} < a_{i-1}$. پس دست بالا 1 کاهش در هر گام برای s رقم می‌خورد و از این رو برای رسیدن s از $n-1$ به 0 به دست پایین $n-1$ گام نیاز است.

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم یازدهمین المپیاد

۵ ۱۱۵ یک شبکه‌ی $m \times n$ از نقاط را در نظر بگیرید که در آن هر نقطه توسط پاره‌خط‌هایی به نقاط مجاورش در بالا، پایین، چپ و راست (در صورت وجود) وصل است. (طول هر یک از پاره‌خط‌ها را یک واحد فرض کنید.) یک مسیر دنباله‌یی از پاره‌خط‌های به هم متصل این شبکه است. منظور از یک مسیر کوتاه، مسیری است که ابتدای آن نقطه‌ی "بالا و سمت چپ" شبکه و انتهای آن نقطه‌ی "پایین و سمت راست" شبکه باشد و نیز یکی از کوتاه‌ترین مسیرهای بین این دو نقطه باشد (یعنی کم‌ترین تعداد پاره‌خط را داشته باشد). عدد طبیعی‌ی دل‌خواه k داده شده است. می‌خواهیم روی هر یک از این پاره‌خط‌ها عددی صحیح از میان اعداد 0، 1، ...، و $k-1$ بنویسیم با این شرط که مجموع اعداد پاره‌خط‌های هر مسیر کوتاه، باقی مانده‌ی ثابتی در تقسیم بر k داشته باشد. برای مثال در جدول زیر m، n، و k به ترتیب برابر 4، 3، و 5 اند. هم‌چنین مجموع اعداد روی پاره‌خط‌های تمامی‌ی مسیرهای کوتاه در تقسیم بر 5 باقی مانده‌ی 1 را تولید می‌کنند.



برای هر n، m، و k تعداد حالت‌هایی را که می‌توان پاره‌خط‌ها را با شرایط فوق عددگذاری کرد بیابید و ادعای خود را ثابت کنید.

۶ ۱۱۶ یک جدول $n \times n$ (یعنی جدولی که در هر سطر یا ستون n خانه دارد)، جمعی است اگر در هر خانه‌ی آن یکی از اعداد 1، 0، یا -1 نوشته شده باشد و عدد هر خانه برابر مجموع اعداد خانه‌های مجاور آن باشد (دو خانه مجاور اند اگر در یک ضلع مشترک باشند). هم‌چنین همه‌ی درایه‌های یک ماتریس جمعی صفر نیستند.

ا برای $n=4$ یک جدول جمعی بسازید.

ب ثابت کنید اگر باقی مانده‌ی تقسیم n بر 5 برابر 4 باشد، می‌توان یک جدول جمعی‌ی $n \times n$ ساخت

۷ ۱۱۸ 1380 وزنه با وزن‌های x_1، x_2، ...، و x_{1380} داریم. می‌دانیم وزن هیچ دو وزنه‌یی برابر نیست، اما وزن هیچ کدام از وزنه‌ها را نمی‌دانیم. تنها اطلاعی که از وزنه‌ها داریم این است که اگر وزنه‌ها را بر حسب وزن آن‌ها از سبک به سنگین بچینیم و به دنباله‌ی وزنه‌های x'_1، x'_2، ...، و x'_{1380} برسیم،

- به ازای iهای زوج، $x_i = x'_i$، و
- به ازای iهای فرد، اگر $x_i = x'_j$ آن گاه $x_j = x'_i$.

وزنه‌ی y داده شده است. می‌خواهیم با کم‌تر از 25 مقایسه مشخص کنیم آیا y با هیچ کدام از وزنه‌های x_1، x_2، ...، و x_{1380} هم‌وزن است یا خیر. روشی برای این کار ارایه کنید. توجه کنید که هر مقایسه عبارت است از قرار دادن دو وزنه در دو کفه‌ی یک ترازوی دوکفه‌یی.

۸ ۱۱۹ کشوری شامل دو استان است و هر استان از 2^n شهر تشکیل شده است. به هر شهر یک کد $n+1$ رقمی با ارقام صفر و یک اختصاص داده ایم، به طوری که کد هر شهر از استان اول شامل تعداد فردی رقم یک و کد هر شهر از استان دوم شامل تعداد زوجی رقم یک است و نیز کد هیچ دو شهری یک‌سان نیست.

در این کشور بین هر دو شهر که کد آن‌ها دقیقن در یک رقم تفاوت دارد، یک خط تلفن مستقیم کشیده شده است. اگر مجموعه‌ی A از تعدادی از شهرهای این کشور تشکیل شده باشد، $F(A)$ مجموعه‌ی شهرهایی است که بین هر کدام از آن‌ها و تعداد فردی از شهرهای مجموعه‌ی A مستقیمن خط تلفن موجود باشد.

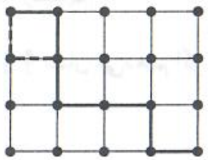
ثابت کنید اگر n زوج باشد و تمام اعضای A را از استان اول انتخاب کنیم، آن گاه $F(F(A)) = A$.

پاسخ‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم یازدهمین المپیاد

۵ ادعا می‌کنیم شرط لازم و کافی برای درست بودن شماره‌گذاری این است که در هر مربع یکه مجموع عددهای ضلع‌های چپ و پایین با مجموع عددهای ضلع‌های راست و بالا در پیمانه‌ی k هم‌نهشت باشد. این شرط را چهارگوش یکه می‌نامیم.

لازم بودن شرط روشن است. (چه‌را؟) گیریم شرط برقرار باشد. در هر کوتاه‌ترین مسیر در هر گام یک تکه را به گونه‌ی ⌉ به ⌊ تبدیل می‌کنیم. روشن است که هم‌نهشتی‌ی مجموع عددهای مسیر در پیمانه‌ی k تغییر نمی‌کند. همه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها در اثر این گام سرانجام از روی ضلع‌های چپ و پایین شبکه خواهند گذشت. به این سان مجموع‌های عددهای همه‌ی کوتاه‌ترین مسیرها در پیمانه‌ی k مانده‌ی یک‌سانی دارند. پس کافی بودن شرط نیز نشان داده شد.



با معلوم بودن سه تا از چهار عدد هر مربع یکه می‌توان عدد چهارم را با توجه به شرط چهارگوش یکه یافت. پس اگر در شکل زیر پاره‌خط‌های پررنگ به دل‌خواه شماره‌گذاری شده باشند، ادامه‌ی شماره‌گذاری به گونه‌یی یک‌تا انجام می‌پذیرد.

شمار پاره‌خط‌های پررنگ به سادگی برابر با $m(n-1)+m-1 = mn-1$ و k^{mn-1} شیوه برای شماره‌گذاری آن‌ها هست.

ا پاسخ را در شکل زیر داریم.

0	+1	+1	0
−1	0	0	−1
−1	0	0	−1
0	+1	+1	0

ب همه‌ی سطرها و ستون‌های $5k$ را با 0 پر می‌کنیم. پس در زیرجدول‌های 4×4 به دست آمده جدول 4×4 بالا را جای‌گذاری کرده، علامت این زیرجدول‌ها را یکی در میان به صورت شترنجی وارون می‌کنیم.

۷ 690 وزنه‌ی شماره‌ی زوج داریم. یک جست و جوی دودویی برای یافتن y میان این وزنه‌ها انجام می‌دهیم؛ y را با وزنه‌ی میانی می‌سنجیم. اگر کوچک‌تر بود، نیمه‌ی بالایی و اگر بزرگ‌تر بود، نیمه‌ی پایینی را کنار می‌گذاریم. جست و جو به هم‌این شیوه در نیمه‌های به دست آمده انجام می‌پذیرد. سرانجام پس از دست بالا $10 = \lceil \lg 690 \rceil$ گام یا وزنه‌یی هم‌وزن y یافت می‌شود، یا دو وزنه‌ی x_p و x_{p+2} پیدا می‌شوند که $x_p < y < x_{p+2}$. اگر هم‌وزن y را نیافتیم، با درست 10 گام دیگر جای وزنه‌ی x_{p+1} را می‌یابیم. گیریم $x_q < x_{p+1} < x_{q+1}$. اکنون کافی است y را با x_{p+1} و x_{q+1} بسنجیم. چه‌را؟ y میان وزنه‌های x_p و x_{p+2} است، پس با مرتب کردن وزنه‌ها، یا وزنه‌ی x_{p+1} میان x_p و x_{p+2} خواهد نشست یا اگر جای x_{p+1} تغییر کند، به جای $q+1$ می‌رود و وزنه‌ی x_{q+1} میان x_p و x_{p+2} جای خواهد گرفت. به این سان با دست بالا 22 گام به خواسته رسیدیم.

۸ نشان می‌دهیم اگر U و V مجموعه‌هایی از شهرهای استان یکم باشند، داریم

$$F(U \triangle V) = F(U) \triangle F(V).$$

می‌دانیم برای نشان دادن $S_1 = S_2$، می‌توان نشان داد $S_1 \subseteq S_2$ و $S_2 \subseteq S_1$:

$$S_1 = S_2 \iff S_1 \subseteq S_2 \wedge S_2 \subseteq S_1.$$

اگر $c \in F(U \triangle V)$، آن گاه c در $U \triangle V$ شماری فرد هم‌سایه دارد. پس شمار هم‌سایه‌های آن در درست یکی از $U \setminus V$ و $V \setminus U$ فرد است. (چه‌را؟) از این رو شمار هم‌سایه‌های c در درست یکی از U و V فرد می‌باشد. به این سان داریم $c \in F(U) \oplus c \in F(V)$ و بنا بر این $c \in F(U) \triangle F(V)$.

اگر $c \in F(U) \triangle F(V)$، آن گاه c در درست یکی از U و V شماری فرد هم‌سایه دارد. پس c در درست یکی از $U \setminus V$ و $V \setminus U$ شماری فرد هم‌سایه دارد. از این رو شمار هم‌سایه‌های آن در $U \triangle V$ جمع یک عدد زوج و یک عدد فرد و بنا بر این فرد است. پس داریم $c \in F(U \triangle V)$.

تا کنون نشان دادیم $F(U \triangle V) = F(U) \triangle F(V)$. بدین سان داریم

$$F(F(U \triangle V)) = F(F(U) \triangle F(V)) = F(F(U)) \triangle F(F(V)).$$

به روشنی برای مجموعه‌ی $\{c\}$ شامل یک شهر داریم $F(F(\{c\})) = \{c\}$. پس با نوشتن مجموعه‌ی شهرهای $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ از شهرهای استان یکم به گونه‌ی

$$\{c_1, c_2, \ldots, c_m\} = \{c_1\} \triangle \{c_2\} \triangle \cdots \triangle \{c_m\}$$

برابری‌های زیر را می‌توان به دست آورد.

$$\begin{aligned} F(F(\{c\}_{i=1}^{m})) &= F\left(F\left(\mathop{\triangle}_{i=1}^{m} \{c_i\}\right)\right) \\ &= \mathop{\triangle}_{i=1}^{m} F(F(\{c_i\})) \\ &= \mathop{\triangle}_{i=1}^{m} \{c_i\} \\ &= \{c_i\}_{i=1}^{m} \end{aligned}$$

دقت کنید که برابری‌ی $F(F(\triangle_{i=1}^{m} S_i)) = \triangle_{i=1}^{m} F(F(S_i))$ به کمک استقرایی ساده از برابری‌ی $F(F(S_1 \triangle S_2)) = F(F(S_1)) \triangle F(F(S_2))$ به دست می‌آید.

دوازدهمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم عصر ۱۳۸۱/۲/۱۷، و نوبت دوم صبح ۱۳۸۱/۲/۱۸ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۵، و برای آزمون نوبت دوم ۵ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ با نام "جدول پریک" دارای 10، مساله‌ی ۲ با نام "دوایر مسلط" دارای 15 (5، 10)، مساله‌ی ۳ با نام "مستطیل‌های سیاه" دارای 20، مساله‌ی ۴ با نام "ماشین کوانتومی‌ی هاتی" دارای 15 (5، 10)، مساله‌ی ۵ با نام "جغ‌جغه‌های رنگارنگ" دارای 10، مساله‌ی ۶ با نام "کارت‌های دور دایره" دارای 20 (10، 10)، و مساله‌ی ۷ با نام "مشکلات دولت" دارای 30 (10، 10، 10) امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد

۱. ۱۲۰ در هر خانه از یک جدول، که 2^k سطر و n ستون دارد، یکی از اعداد صفر یا 1 نوشته شده است به طوری که تعداد 1های هر سطر بیش‌تر یا مساوی‌ی تعداد صفرهای آن است. ثابت کنید که می‌توان k (یا کم‌تر از k) ستون از n ستون جدول را انتخاب کرد و خانه‌های آن ستون‌ها را رنگ نمود، به گونه‌یی که حد اقل یکی 1های هر سطر در خانه‌های رنگ شده باشد.

۲. ۱۲۱ n نقطه در صفحه داده شده است. می‌خواهیم به ازای kِ داده شده، k دایره با شعاع مساوی را طوری رس کنیم که تمام n نقطه را در بر گیرند (یعنی هر نقطه داخل یا روی محیط لا اقل یک دایره بیفتد) و شعا دایره‌ها در حد امکان کوچک باشد.

برای این کار ابتدا مجموعه‌ی تهی‌ی S را در نظر می‌گیریم. سپس یکی از نقاط را به دل‌خواه انتخاب می‌کنی و در مجموعه‌ی S قرار می‌دهیم. در مرحله‌ی اول نقطه‌یی را به مجموعه‌ی S اضافه می‌کنیم که بیش‌تری فاصله را با نقطه‌ی درون S دارد؛ این فاصله را a_1 می‌نامیم. به هم‌این ترتیب در مرحله‌ی iم نقطه‌یی را مجموعه‌ی S اضافه می‌کنیم که بیش‌ترین فاصله را از مجموعه‌ی S دارد (فاصله‌ی یک نقطه‌ی دل‌خواه از مجموعه نقاط S را فاصله‌ی A تا نزدیک‌ترین نقطه‌ی S به A تعریف می‌کنیم). این بیش‌ترین فاصله a_i می‌نامیم. بعد از انجام $k-1$ مرحله، حال مجموعه‌ی S شامل k نقطه است و فاصله‌های a_1، a_2، $\ldots$، و a_{k-1} و تعیین شده اند. فرض کنید مرحله‌ی kم را نیز انجام دهیم ولی با این تفاوت که در ای مرحله نقطه‌ی به دست آمده را به S اضافه نمی‌کنیم، و فقط فاصله را یادداشت می‌کنیم.

الف ثابت اگر k دایره به مراکز نقاط درون S و به شعاع a_k در صفحه رسم کنیم، این دایره‌ها تمام n نق را در بر می‌گیرند.

ب ثابت کنید به ازای هر عدد r، اگر k دایره‌ی دل‌خواه به شعاع r وجود داشته باشند که تمام n نقطه در بر گیرند، آن گاه خواهیم داشت: $a_k \leqslant 2r$.

۳. ۱۲۳ خانه‌های یک جدول $m \times n$ را با دو رنگ سفید و سیاه به طور دل‌خواه رنگ کرده ایم. یک زیرمجموع مستطیل شکل به ابعاد a و b ($1 \leqslant a \leqslant m$ و نیز $1 \leqslant b \leqslant n$) از خانه‌های جدول را یک زیرمستط

سیاه می‌نامیم اگر تمامی‌ی $a \times b$ خانه‌ی داخل آن، سیاه باشند. یک زیرمستطیل سیاه را غیر قابل گسترش می‌نامیم، هر گاه هیچ زیرمستطیل سیاه دیگری شامل تمامی‌ی خانه‌های آن نباشد. ثابت کنید تعداد زیرمستطیل‌های سیاه غیر قابل گسترش بیش‌تر از mn نیست.

۴. ماشین محاسباتی‌ی هاتی دارای n خانه‌ی حافظه‌ی M_1، M_1، ...، و M_n است. هر یک از این خانه‌های حافظه می‌توانند یک از مقادیر 0 یا 1 را در خود ذخیره کنند. برای راحتی‌ی کار اعداد ذخیره شده در خانه‌های حافظه را با یک رشته به طول n از 0 و 1 نمایش می‌دهیم که در آن M_1 عنصر سمت چپ است: $\langle M_1, M_2, \ldots, M_n \rangle$.

- دستور $C\ i$. در این دستور i یک عدد صحیح بین 1 تا n است. با اجرای این دستور، عدد ذخیره شده در خانه‌ی حافظه‌ی M_i عوض می‌شود (از 0 به 1 و از 1 به 0 تغییر می‌کند).
- دستور $D\ i$. در این جا نیز i یک عدد صحیح بین 1 تا n است. هاتی برای اجرای این دستور عدد ذخیره شده در تمامی‌ی خانه‌های حافظه به جز M_i را بررسی می‌کند: در صورتی که تمامی این مقادیر 1 بودند، فقط عدد ذخیره شده در M_i را عوض می‌کند، و در غیر این صورت (اگر حد اقل یکی از آن‌ها صفر بود) تغییری در مقادیر خانه‌ها ایجاد نمی‌کند.

مثلن فرض کنید هاتی 3 خانه‌ی حافظه دارد که مقادیر $\langle 0,0,1 \rangle$ در آن ذخیره شده اند. حال اگر دستور C 2 را به ماشین بدهیم، این مقادیر تبدیل به $\langle 0,1,1 \rangle$ خواهند شد. در ادامه اگر دستور D 1 را وارد کنیم، حاصل برابر $\langle 1,1,1 \rangle$ می‌شود. اما اگر دستور D 1 را قبل از دادن دستور C 2 به ماشین می‌دادیم، حاصل هم‌آن $\langle 0,0,1 \rangle$ باقی می‌ماند.

یک جدول صورت مساله جدولی شامل 2^n سطر و 2 ستون است که در هر ستون آن تمامی‌ی رشته‌های به طول n از 0 و 1، هر رشته دقیقن یک بار، آمده است. به رشته‌های ستون اول رشته‌های ورودی و به رشته‌های ستون دوم رشته‌های خروجی می‌گوییم. ما باید برای هاتی یک برنامه بنویسیم به نحوی که اگر هر یک از رشته‌های ورودی در خانه‌های حافظه‌ی هاتی باشد، پس از اجرای این برنامه، رشته‌ی خروجی‌ی هم‌سطر با آن رشته‌ی ورودی در حافظه‌ی هاتی قرار گرفته باشد.

یک برنامه شامل چند دستورالعمل است که پشت سر هم نوشته شده اند. هنگامی که یک برنامه را به هاتی بدهیم، دستورالعمل‌های این برنامه به ترتیب اجرا می‌شوند. مثلن فرض کنید هاتی 2 خانه‌ی حافظه دارد ($n = 2$) و جدول صورت مساله‌ی زیر داده شده است:

رشته‌ی ورودی	رشته‌ی خروجی
$(0,0)$	$(0,1)$
$(0,1)$	$(1,0)$
$(1,0)$	$(1,1)$
$(1,1)$	$(0,0)$

یک برنامه‌ی نمونه که این کار را انجام می‌دهد به صورت زیر است:

D 1
C 2

الف) یک جدول صورت مساله را ساده می‌نامیم اگر در آن هر رشته‌ی ورودی مساوی‌ی رشته‌ی خروجی‌ی هم‌سطرش باشد، به جز دو رشته‌ی A و B که این دو رشته فقط در یکی از n عنصر خود با هم تفاوت داشته باشند. توجه کنید که در این جدول، A رشته‌ی خروجی‌ی هم‌سطر با رشته‌ی ورودی‌ی B و هم‌چنین B، رشته‌ی خروجی‌ی هم‌سطر با رشته‌ی ورودی‌ی A است. ثابت کنید که می‌توان برای هر جدول صورت مساله‌ی ساده، یک برنامه نوشت.

ب) ثابت کنید که می‌توان برای هر جدول صورت مساله، یک برنامه نوشت.

پاسخ‌های نوبت یکم

مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد

۱ ◊ حکم برای $k = 0$ برقرار نیست. برای $k = 1$ نیز اگر n زوج باشد، حکم نادرست است. هم می
حکم را به رنگ کردن $k + 1$ ستون یا کم‌تر بازنوشت، هم می‌توان شرط $k \geqslant 2$ را اعمال نمود.* استقرا را رو
به کار می‌گیریم. به این سان هر دوی این تغییرها تنها پایه‌ی استقرا را تغییر می‌دهند و اثری در گام استقرایی ند
شرط $k \geqslant 2$ را اعمال می‌کنیم.

گیریم $k = 2$. اگر ستونی دست پایین سه 1 داشته باشد، این ستون را برای رنگ کردن برمی‌گزینیم.
دوم درصورت نیاز به سادگی پیدا می‌شود. اگر همه‌ی ستون‌ها دست بالا دو 1 داشته باشند، همه‌شان درست
دارند. (چه‌را؟) ستونی دل‌خواه را برمی‌گزینیم. گیریم این ستون در سطرهای i و j دارای 0 است. در $n - 1$
دیگر $2\lceil n/2\rceil$ تا 1 در سطرهای i و j هست. از آن جایی که $2\lceil n/2\rceil \geqslant n > n - 1$، ستونی را می‌توان
که در سطرهای i و j دارای 1 باشد.

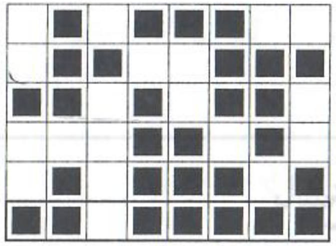
گیریم $k > 2$. اگر درهمه‌ی ستون‌ها کم‌تر از 2^{k-1} تا 1 باشد، در جدول کم‌تر از $2^{k-1} = (n/2)2^k$
1 خواهد بود. پس در ستونی دست پایین 2^{k-1} تا 1 هست. این ستون را برگزیده، 2^{k-1} سطر دارای 1 د
ستون را کنار می‌گذاریم. پس به جدولی $2^{k-1} \times n$ می‌رسیم که بر پایه‌ی فرض استقرا می‌توان با دست
$k - 1$ ستون در آن به خواسته رسید. پس به دست بالا k ستون در جدول $2^k \times n$ نیاز است.

۲

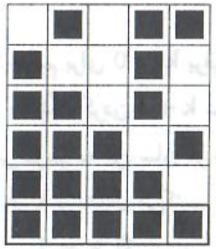
ا اگر نقطه‌یی بیرون همه‌ی این دایره‌ها باشد، فاصله‌ی آن تا S از a_k بیش‌تر است. این شدنی نیس

ب ◊ S' را مجموعه‌ی $k + 1$ نقطه‌ی گزیده شده تا مرحله‌ی kم می‌گیریم. هر دو نقطه در این مج
فاصله‌ی دست پایین a_k دارند. k دایره‌ی در بر گیرنده‌ی n نقطه را به شعاع r در نظر می‌گیریم. بر
اصل دیریکله دو نقطه از S' به فاصله‌ی d در یکی از این دایره‌ها جای می‌گیرند. پس داریم $2r \geqslant$
سویی دیگر داریم $d \geqslant a_k$. پس $a_k \leqslant 2r$.

۳ ◊◊ پایین‌ترین سطر را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم همه‌ی مستطیل‌های گسترش‌ناپذیر را بیاب
کرانه‌های چپ و پایین آن‌ها در این سطر بنا شده است.



با توجه به الگوی رنگی‌ی به کار رفته در این سطر روشن است که بیشینه‌ی شمار این مستطیل‌های گسترش‌ناپذیر می‌تواند n تا باشد که تنها اگر سطر همه‌سیاه باشد، به دست می‌آید. (چه‌را؟)



اگر در هر سطر جز سطر پایینی کران‌دار بودن مستطیل‌ها را از پایین نادیده گیریم، به دست بالا mn مستطیل از این دست می‌رسیم. به روشنی شمار مستطیل‌های گسترش‌ناپذیر از شمار این گونه مستطیل‌ها بیش‌تر نیست. پس دست بالا mn مستطیل گسترش‌ناپذیر می‌توان یافت.

۴

ا گیریم A و B در جای d گوناگون و در جای‌های z_1، z_2، ...، z_m دارای 0 باشند. برنامه‌ی

C z_1
C z_2
⋮
C z_m
D d
C z_1
C z_2
⋮
C z_m

خروجی‌ی خواسته شده را دارد.

ب ؟ نشان می‌دهیم برای هر دو رشته‌ی U و V می‌توان U را به V، و V را به U تبدیل کرد. دنباله‌ی $\langle U, I_1, I_2, \dots, I_m, V\rangle$ را از رشته‌ها به گونه‌یی می‌سازیم که هر دو جمله‌ی کنار هم آن درست در یک

جا گوناگونی داشته باشند. (چه‌گونه؟) اکنون زیربرنامه‌های جابه‌جایی‌ی U و I_1، U و I_2، ...، U و I_m را که بر پایه‌ی قسمت پیش نوشته شده اند، پشت هم اجرا می‌کنیم. پس دنباله‌ی خروجی‌ی متناظر تا کنون $\langle I_1, I_2, \dots, I_m, V, U\rangle$ می‌گردد. اکنون جابه‌جایی‌های V و I_m، V و I_{m-1}، ...، V و I_2، V و I_1 را پشت هم اجرا می‌کنیم. به این سان دنباله‌ی خروجی $\langle V, I_1, I_2, \dots, I_m, U\rangle$ می‌گردد.

توانستیم زیربرنامه‌یی بنویسیم که دو رشته‌ی دل‌خواه U و V را به هم تبدیل کند. پس کافی است یک الگوریتم مرتب‌سازی‌ی ساده را مانند مرتب‌سازی‌ی حبابی به کار بریم تا به خواسته دست یابیم.

گیریم دنباله‌ی رشته‌های $\langle S_1, S_2, S_3, \dots\rangle$ بخواهد به دنباله‌ی $\langle S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}, \dots\rangle$ تبدیل شود. پس کافی است به ترتیب زیربرنامه‌هایی را اجرا نماییم که جمله‌ی یکم دنباله‌ی آغازین، S_1، را با S_{i_1}، جمله‌ی دوم دنباله‌ی به دست آمده را با S_{i_2}، جمله‌ی سوم دنباله‌ی به دست آمده را با S_{i_3}، ... جا به جا کند.

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد

۵ ۱۲۶ یک کارخانه‌ی تولید اسباب‌بازی، جغ‌جغه‌هایی در k رنگ مختلف تولید می‌کند. این کارخانه برای بسته‌بندی از جعبه‌هایی استفاده می‌کند که n جغ‌جغه در هر یک جا می‌گیرد. ثابت کنید کارخانه می‌تواند هر nk جغ‌جغه (با تعداد دل‌خواهی جغ‌جغه از هر رنگ) را به گونه‌یی در k بسته جای دهد که در هر جعبه، جغ‌جغه‌ها حد اکثر 2 رنگ مختلف داشته باشند.

۶ ۱۲۷ 55 کارت داریم که روی آن‌ها اعداد مختلفی نوشته شده است، و ما از مقادیر آن‌ها بی‌اطلاع هستیم. کارت‌ها روی دایره‌یی به پشت چیده شده اند به گونه‌یی که ما عدد نوشته شده روی آن‌ها را نمی‌بینیم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از کارت‌ها را انتخاب کرده، آن را برگردانیم، عدد نوشته شده روی آن را بخوانیم و دوباره آن را سر جای خود بگذاریم. می‌خواهیم روشی ارایه دهیم که با برگرداندن تعداد کمی کارت، 3 کارت مجاور هم پیدا کنیم که عدد نوشته شده روی کارت وسط از اعداد نوشته شده روی دو کارت کناری‌ی آن بیش‌تر باشد.

ا ثابت کنید می‌توانیم با برگرداندن حد اکثر 13 کارت، سه کارت مورد نظر را پیدا کنیم.

ب ثابت کنید می‌توانیم با برگرداندن حد اکثر 9 کارت، سه کارت مورد نظر را پیدا کنیم. (حل این بند با برگرداندن حد اکثر 10 کارت نیمی از نمره‌ی این قسمت را[1] خواهد داشت.)

۷ ۱۲۹ به علت برخی مشکلات سیاسی در کشور یوتوپیا بین نمایندگان مجلس این کشور اختلاف افتاده است به طوری که هر نماینده‌ی مجلس با تعدادی از نمایندگان دیگر مشکل پیدا کرده است و حاضر به نشستن با هیچ یک از آن‌ها سر یک میز نیست. رییس جمهور این کشور برای حل این مشکل به شرکت زتروس روی آورده است. این شرکت دو ماشین قابل برنامه‌ریزی‌ی A و B را خریداری کرده است. هر برنامه‌یی که به این ماشین‌ها داده می‌شود از چهار قسمت تشکیل شده است:

- قسمت اول شامل تعدادی متغیر است که باید نام‌های آن‌ها به ماشین داده شوند.
- در قسمت دوم تعدادی نابرابری به ماشین داده می‌شود که همگی باید به شکل زیر باشند:

توجه کنید که جهت بزرگ‌تر نابرابری‌ها باید رو به متغیرها باشد. در نابرابری‌ی بالا k یک عدد طبیعی‌ی دل‌خواه است. هم‌چنین a_1، a_2، $\ldots$، a_k و b اعداد حقیقی‌ی دل‌خواه و x_1، x_2، $\ldots$، و x_k تعدادی از متغیرها هستند.

- در قسمت سوم یکی از دو کلمه‌ی minimum و یا maximum به ماشین داده می‌شود.
- در قسمت چهارم تعدادی از متغیرها به عنوان متغیرهای اصلی به ماشین معرفی می‌شوند.

اگر چنین برنامه‌یی را به ماشین A بدهیم، این ماشین به هر یک از متغیرها یک مقدار حقیقی‌ی نامنفی طوری نسبت می‌دهد که اولن تمامی‌ی نابرابری‌ها برقرار باشند و ثانین مجموع متغیرهای اصلی بر حسب این که کلمه‌ی انتخاب شده minimum یا maximum بوده، کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار ممکن خود را داشته باشد. در پایان، ماشین مقادیر نسبت داده شده به متغیرها و مجموع متغیرهای اصلی را چاپ می‌کند.

فرق ماشین B با ماشین A تنها در این نکته است که این ماشین به جای مقادیر حقیقی‌ی نامنفی، فقط می‌تواند یکی از دو مقدار 0 یا 1 را به متغیرها نسبت دهد. این ماشین نیز مانند A کم‌ترین یا بیش‌ترین مقدار مجموع متغیرهای اصلی را با حفظ درستی‌ی نابرابری‌ها به دست می‌آورد.

برای مثال برنامه‌ی زیر را در نظر بگیرید:

متغیرها	x, y, z
نابرابری‌ها	$-2x - y - z \geqslant -2$ $x \geqslant 1/6$
کلمه‌ی انتخاب شده	maximum
متغیرهای اصلی	y, z

با دادن این برنامه به ماشین A، ماشین عدد $5/3$ را به عنوان بیش‌ترین مقدار ممکن برای $y + z$ چاپ می‌کند، که مثلن به ازای $x = 1/6$، $y = 0$، و $z = 5/3$ به دست می‌آید. (توجه کنید که مقادیر دیگری نیز برای x، y، و z وجود دارند که در نابرابری‌ها صدق کنند و مجموع $y + z$ را برابر $5/3$ قرار دهند. ولی نمی‌توان مقادیری برای متغیرها یافت که نابرابری‌ها برقرار بمانند و $y + z$ از $5/3$ بیش‌تر شود.)

حال اگر هم‌این مساله را به ماشین B بدهیم، عدد 0 را به عنوان جواب اعلام می‌کند که مثلن به ازای $x = 1$، $y = 0$، و $z = 0$ به دست می‌آید.

شرکت زتروس اعلام کرد که حاضر است مسایل پیش‌نهاد شده توسط دولت را حل کند. اولین مساله‌یی که پیش‌نهاد شد از طرف وزارت به‌داشت بود. در این مساله وزارت به‌داشت قصد داشت در بعضی از شهرهای کشور مقداری دارو برای مواقع اضطراری ذخیره کند به گونه‌یی که مجموع داروی موجود در هر شهر و تمام شهرهایی که بین آن‌ها و این شهر پرواز مستقیم وجود دارد بیش‌تر از 100 تن باشد. هدف این بود که مجموع کل داروهای ذخیره شده در تمام شهرها کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد. توجه کنید که اگر از شهر a به b پرواز مستقیم وجود داشته باشد، از b نیز به a پرواز مستقیم وجود دارد.

زتروس برای حل این مساله با استفاده از ماشین A برنامه‌یی به این منظور طراحی کرد. در این برنامه به هر شهر یک متغیر نسبت داده شده که نشان‌گر مقدار دارویی است که باید در آن شهر ذخیره شود. به این ترتیب اگر n را تعداد شهرها فرض کنید، آن گاه متغیرهای برنامه x_1، x_2، $\ldots$، و x_n می‌باشند.
سپس به ازای هر شهر یک نابرابری در برنامه قرار داه شد به این ترتیب که مجموع متغیر مربوط به آن شهر و متغیر مربوط به شهرهایی که بین آن‌ها و این شهر پرواز مستقیم وجود دارد، بزرگ‌تر یامساوی‌ی 100 باشد. در پایان کلمه‌ی minimum به ماشین داده شد و تمامی‌ی متغیرها به عنوان متغیرهای اصلی معرفی گردیدند.
برای مثال اگر کشور، پنج شهر داشته باشد و بین شهرهای 1 و 2، شهرهای 2 و 3، شهرهای 3 و 4، و شهرهای 3 و 5 پرواز مستقیم وجود داشته باشد، برنامه‌یی که به ماشین داده می‌شود به صورت زیر است:

متغیرها	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5
نابرابری‌ها	$x_1 + x_2 \geqslant 100$ $x_2 + x_1 + x_3 \geqslant 100$ $x_3 + x_2 + x_4 + x_5 \geqslant 100$ $x_4 + x_3 \geqslant 100$ $x_5 + x_3 \geqslant 100$
کلمه‌ی انتخاب شده	minimum
متغیرهای اصلی	x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

که جواب ماشین برابر 200 است که به ازای مثلن $x_1 = 100$، $x_2 = 0$، $x_3 = 100$، $x_4 = 0$، و $x_5 = 0$ به دست می‌آید. مساله‌ی بعدی توسط وزارت مبارزه با قاچاق پیش‌نهاد شد. این وزارت قصد داشت در بعضی از فرودگاه‌های کشور مراکز مبارزه با قاچاق تاسیس کند به طوری که تعداد این مراکز تا حد امکان کم باشد و در حد اقل یکی از فرودگاه‌های مبدا یا مقصد هر پرواز یک مرکز مبارزه با قاچاق وجود داشته باشد.
زتروس برای حل این مساله با استفاده از ماشین B برنامه‌یی ارایه داد. در این برنامه به ازای هر فرودگاه یک متغیر وجود داشت. در این صورت اگر n فرودگاه داشته باشیم، متغیرها x_1، x_2، $\ldots$، و x_n خواهند بود. سپس برای هر پرواز بین فرودگاه i و j نابرابری‌ی $x_i + x_j \geqslant 1$ در برنامه قرار داده شد. در پایان کلمه‌ی minimum به ماشین داده شد و همه‌ی متغیرها به عنوان متغیرهای اصلی معرفی شدند.
عددی که ماشین B به عنوان کم‌ترین مقدار ممکن برای مجموع متغیرهای اصلی اعلام کرد، برابر کم‌ترین تعداد مراکزی بود که باید تاسیس می‌شدند، و متغیرهایی که مقدار 1 گرفتند، فرودگاه‌هایی را تعیین کردند که باید در آن‌ها مرکز مبارزه با قاچاق تاسیس می‌شد.
اکنون شما باید زتروس را یاری کنید که بتواند مساله‌های پیش‌نهادی‌ی دیگری را نیز با موفقیت به انجام برساند. هم‌آن طور که در مثال‌های بالا ملاحظه کردید طراحی برنامه‌ها باید به گونه‌یی باشد که نوشتن برنامه‌ی نهایی از روی اطلاعاتی که در دست‌رس شرکت قرار می‌گیرد، به سادگی امکان‌پذیر باشد.

17 رییس جمهور یوتوپیا با مشاهده‌ی موفقیت این شرکت در حل مسایل یاد شده، مساله‌ی زیر را به

این شرکت پیش‌نهاد داد: آقای رییس جمهور می‌خواهد تعدادی از نمایندگان مجلس را به جلسه‌یی دعوت کند ولی به علت مشکلی که در ابتدا گفته شد، او نمی‌خواهد که جلسه به مشاجره کشیده شود و از طرفی قصد دارد که حد اکثر تعداد نمایندگان ممکن را دعوت کند. به همین خاطر، او لسیت نمایندگانی را که با هم خصومت دارند تهیه کرده و به شرکت داده و از آن خواسته است که بیش‌ترین تعداد نمایندگانی را تعیین کند که هیچ دو تای آن‌ها با هم خصومت نداشته باشند. با استفاده از ماشین B به زتروس کمک کنید که این مساله را حل کند.

ب وزارت کار هم مساله‌یی مطرح کرده است. این وزارت تعدادی پروژه دارد که می‌خواهد آن‌ها را به چند شرکت واگذار کند. هر شرکت لیست پروژه‌هایی را که توانایی‌ی انجام آن‌ها را دارد به این وزارت داده است. این وزارت قصد ندارد به هیچ شرکتی بیش از یک پروژه واگذار کند و یا پروژه‌یی را به بیش از یک شرکت واگذار کند. از طرفی می‌خواهد تعداد پروژه‌های واگذار شده بیش‌ترین تعداد ممکن باشد. این مساله را با استفاده از ماشین B حل کنید.

پ ثابت کنید که اگر در مساله‌ی وزارت مبارزه با قاچاق، برنامه‌ی تهیه شده برای ماشین B اشتباهن به ماشین A داده شود، جواب به دست آمده کم‌تر نصف جواب به دست آمده از ماشین B نخواهد بود. (یعنی مجموع متغیرهای اصلی در جواب ماشین A کم‌تر از مجموع متغیرهای اصلی در جواب ماشین B نخواهد بود).

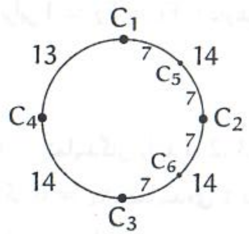
پاسخ‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم دوازدهمین المپیاد

۵ استقرا را روی k به کار می‌بندیم. درستی‌ی پایه‌ی $k = 1$ روشن است. گیریم $k > 1$. رنگ با کم‌ترین شمار جغ‌جغه‌های n_m را c_m و رنگ با بیش‌ترین شمار جغ‌جغه‌های n_M را c_M می‌گیریم. به روشنی داریم $n_m \leqslant n \leqslant n_M$. (چه‌را؟) بسته‌ی nام را با n_m جغ‌جغه از رنگ c_m، و $n - n_M$ جغ‌جغه‌ی از رنگ c_M پر می‌کنیم. اکنون بر پایه فرض استقرا $n(k-1)$ جغ‌جغه‌ی بازمانده را از $k-1$ رنگ می‌توان در $k-1$ بسته به گونه‌ی خواسته شده جای دارد.

۶ فاصله‌ی دو کارت را d می‌گوییم اگر $d - 1$ کارت میان‌شان باشند.

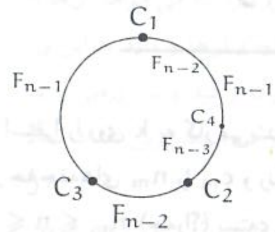
ا کارت‌های C_1، C_2، C_3، C_4 را به فاصله‌های به ترتیب 14 از هم می‌خوانیم. فاصله‌ی میان C_4 و C_1 بر این سان 13 است.



گیریم C_2 بزرگ‌ترین این چهار کارت باشد. پس کار را با کارت‌های میان C_1 و C_3 شامل C_2 پی می‌گیریم. کارت C_5 را به فاصله‌ی 7 از C_1 و C_2 و کارت C_6 را به فاصله‌ی 7 از C_2 و C_3 می‌خوانیم. اگر $C_5 > C_2$، کار را با کارت‌های میان C_1 و C_2 شامل C_5 ادامه می‌دهیم. در غیر این صورت اگر $C_6 > C_2$ کار را با کارت‌های میان C_2 و C_3 شامل C_6 ادامه می‌دهیم. در غیر این دو صورت نیز داریم $C_2 > C_5, C_6$، و کار با کارت‌های میان C_5 و C_6 شامل C_2 ادامه می‌یابد. به این سان از فاصله‌ی $\lceil 55/2 \rceil = 28$ میان C_1 و C_3 به فاصله‌ی $\lceil 28/2 \rceil = 14$ رسیده ایم. در دوگام‌های بعدی نیز فاصله‌ی دو کارت دو سر بازه به ترتیب دست بالا $\lceil 14/2 \rceil = 7$، $\lceil 7/2 \rceil = 4$، $\lceil 4/2 \rceil = 2$ خواهد بود. پس در دست بالا $4 + 4 + 2 = 12$ گام به خواسته رسیدیم.

ب می‌دانیم دنباله‌ی $F_n = \langle 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots \rangle$ که در آن هر جمله از جمع دو جمله‌ی پیشین به دست می‌آید، دنباله‌ی فیبوناچی نام دارد. نشان می‌دهیم اگر شمار کارت‌های پیرامون دایره F_{n+1} باشد، در n گام می‌توان به خواسته رسید: $F_{9+1} = 55$.

کارت‌های C_1 و C_2 را به فاصله‌ی F_{n-1} از هم می‌خوانیم. گیریم $C_1 < C_2$. کارت C_3 را نیز به فاصله‌ی F_{n-2} از C_2 و در بیرون کمان کوچک‌تر C_1C_2 می‌خوانیم. بزرگ‌ترین میان سه کارت خوانده شده یکی از C_2 و C_3 است. گیریم $C_2 > C_1, C_3$.



آن گونه که در ساختار بالا می‌بینم، بزرگ‌ترین بودن C_3 تفاوتی در ادامه‌ی استدلال به جا نمی‌گذارد. کارت C_4 را میان C_1 و C_2 به فاصله‌ی F_{n-3} از C_2 می‌خوانیم. فاصله‌ی میان C_1 و C_4 برابر F_{n-2} است. اکنون اگر $C_2 > C_4$، داریم $C_1 > C_4$ و کار با کارت‌های C_1، C_4، C_2 ادامه می‌یابد. اگر هم $C_4 > C_2$، داریم $C_1 > C_2$ و کار با کارت‌های C_3، C_2، C_4 پی گرفته می‌شود. به این سان در خواندن nاُم که کارت C_n به فاصله‌ی $F_{n+1-n} = F_1 = 1$ از کارت میانی خوانده می‌شود، سه کارت فاصله‌های برابر $F_1 = F_2 = 1$ را دارند و کار به پایان رسیده است.

۷

ا نمایندگان را با 1، 2، 3، ... شماره‌گذاری کرده، متغیر x_i را متناظر با نماینده‌ی شماره‌ی i می‌گردانیم. اگر $x_i = 0$، نماینده‌ی i دعوت نمی‌شود، و اگر $x_i = 1$، دعوت می‌شود. گیریم جفت کینه‌توز (i, j) را داشته باشیم. پس دست بالا یکی از نمایندگان i و j باید در نشست باشد. از این رو باید داشت $1 \leqslant x_i + x_j$. به این سان نابرابری‌های $-1 \geqslant -x_i - x_j$ را برای هر جفت کینه‌توز، maximum، و همه‌ی x_mها را به دست‌گاه می‌دهیم. پاسخ به سادگی از خروجی‌ی دست‌گاه به دست می‌آید.

ب پروژه‌ها را با 1، 2، 3، ... و شرکت‌ها را نیز با 1، 2، 3، ... شماره‌گذاری می‌کنیم. متغیر x_{ij} را می‌سازیم اگر شرکت j توانایی‌ی انجام پروژه‌ی i را داشته باشد. اگر $x_{ij} = 1$، پروژه‌ی i به شرکت j واگذار شده است. باید داشت $\sum_m x_{im} \leqslant 1$ تا هیچ کاری به بیش از یک شرکت واگذار نشود. هم‌چنین باید داشت $\sum_m x_{mj}$ تا به هیچ شرکتی بیش از یک پروژه واگذار نگردد. مجموع $\sum_{m,n} x_{mn}$ نیز شمار پروژه‌های واگذار شده را نشان می‌دهد. این مجموع باید بیشینه شود.

پ متغیر y_i را از روی خروجی‌ی x_i دست‌گاه A به گونه‌ی زیر می‌سازیم.

$$y_i = \begin{cases} 0 & x_i < .5 \\ 1 & x_i \geqslant .5 \end{cases}$$

به روشنی داریم $y_i \leqslant 2x_i$. اکنون در هر نابرابری‌ی $1 \leqslant x_i + x_j$ دست پایین یکی از x_i و x_j باید ناکوچک‌تر از 5. باشد و از این رو دست پایین یکی از y_i و y_j برابر با 1 است. پس y_iها با جای‌گیری به جای x_iها نابرابری‌ها را برآورده می‌سازند. از این رو پاسخ دست‌گاه B بیش از $\sum_m y_m$ نیست. مقدار $\sum_m y_m$ نیز از $\sum_m 2x_m$ بیش‌تر نمی‌باشد.

سیزدهمین المپیاد کامپیوتر

مرحله‌ی دوم

- آزمون در دو نوبت، نوبت یکم عصر ۱۳۸۲/۲/۱۶، و نوبت دوم صبح ۱۳۸۲/۲/۱۷ برگزار گشت.
- وقت برای آزمون نوبت یکم ۵، و برای آزمون نوبت دوم ۵ ساعت بود.
- مساله‌ی ۱ با نام "علی‌باینری" دارای 20 (10، 10)، مساله‌ی ۲ با نام "جدول خوش‌ریخت" دارای 25، مساله‌ی ۳ با نام "قطرها" دارای 25، مساله‌ی ۴ با نام "صندوق‌چه‌های پررمز و راز" دارای 30، مساله‌ی ۵ با نام "لامپ‌ها" دارای 20 (10، 10)، مساله‌ی ۶ با نام "جدول رنگی" دارای 25، مساله‌ی ۷ با نام "مرتب‌سازی کارتی" دارای 25، و مساله‌ی ۸ با نام "انتقال مهره‌ها" دارای 30 (20، 30) امتیاز بود.

پرسش‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم سیزدهمین المپیاد

۱ ۱۲۳ علی کوچولو جمع اعداد دودویی را تازه یاد گرفته است و هنوز برخی از جمع‌ها را به خوبی انجام نمی‌دهد. در واقع او هنوز دو بر یک (همان ده بر یک در مبنای دو) را حساب نمی‌کند. مثلن اگر او بخواهد دو عدد 1010 و 0011 را جمع کند حاصل جمع را به صورت 1001 می‌نویسد، در صورتی که اگر "دو بر یک"ها را در نظر می‌گرفت جواب برابر 1101 می‌شد. در ضمن علی کوچولو یک بازی‌ی جدید یاد گرفته و بسیار هیجان زده است.

ا او تمام رشته‌های از 0 و 1 به طول 4 (به استثنای رشته‌ی 0000) را روی یک صفحه‌ی کاغذ نوشته است (جمعن 15 رشته)، هدف او از این بازی این است که این رشته‌ها را به 4 دسته طوری تقسیم کند که وقتی دو عدد را از یک دسته جمع می‌کند حاصل جمع در یک دسته‌ی دیگر قرار داشته باشد (توجه کنید که علی کوچولو جمع دو عدد را به صورت بالا انجام می‌دهد). او چند روش را برای این تقسیم‌بندی امتحان کرده است ولی نتوانسته است این مساله را حل کند و اکنون از شما می‌خواهد که به او کمک کنید.

این 4 دسته‌بندی را به روی برگه‌ی پاسخ خود بنویسید.

ب مادر علی کوچولو به او گفته که بلد است سوال قسمت قبل را با 3 دسته حل کند (یعنی 15 رشته را به 3 دسته و با هم‌آن شرایط تقسیم کند). با توجه به این اطلاعات ثابت کنید می‌توان تمام رشته‌های به طول $4n$ به استثنای رشته‌ی $0\cdots00$ را به $3n$ دسته طوری تقسیم کرد که جمع هیچ دو عدد از یک دسته (به روش علی کوچولو) در هم‌آن دسته نباشد.

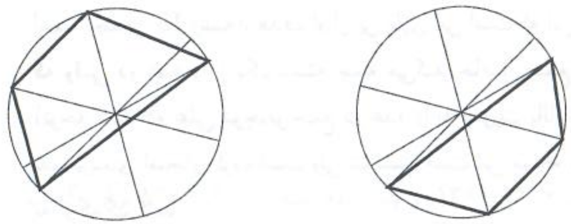
۲ ۱۲۴ می‌خواهیم خانه‌های یک جدول $n \times 3$ (با n سطر و 3 ستون) که n عددی فرد است را با اعداد 1 تا $3n$ به گونه‌یی پر کنیم که هر عدد دقیقن در یک خانه نوشته شود و مجموع اعداد نوشته شده در هر یک از n سطر با سطرهای دیگر یک‌سان باشد. مثلن برای $n = 3$، در جدول زیر که از اعداد 1 تا 9 پر شده است جمع اعداد خانه‌های هر سطر برابر 15 است.

8	6	1
9	4	2
7	5	3

آیا می‌توانید این کار را برای سایر مقادیر فرد n انجام دهید؟ شما باید در جواب یک روش کلی برای پر کردن جدول‌های $3 \times n$ ارایه دهید.

در دایره‌یی n قطر مختلف رسم شده است. هر قطر دو نقطه‌ی انتهایی دارد (نقاط تلاقی‌ی قطر با دایره)، پس در مجموع $2n$ نقطه‌ی انتهایی داریم. یک مجموعه‌ی متعادل مجموعه‌یی از n نقطه‌ی انتهایی است به گونه‌یی که دقیقن یکی از دو نقطه‌ی انتهایی‌ی هر قطر در این مجموعه باشد، و علاوه بر آن ، اگر یک nضلعی‌ی ساده رسم کنیم که رئوس آن، نقاط عضو این مجموعه باشند، مرکز دایره داخل این nضلعی قرار گیرد. (منظور از nضلعی‌ی ساده، شکلی است با n راس و n ضلع که اضلاع آن فقط در راس‌ها با یک‌دیگر برخورد می‌کنند).

مثلن در یکی از دو شکل زیر نقاط مشخص شده یک مجموعه‌ی متعادل را تشکیل می‌دهند در صورتی که در شکل دیگر مجموعه‌ی مشخص شده متعادل نیست، چون مرکز دایره درون 4ضلعی قرار ندارد.



به ازای هر عدد طبیعی‌ی n $(n > 2)$ اگر در دایره n قطر مختلف و دل‌خواه رسم کنیم، چند مجموعه‌ی متعادل مختلف از نقاط خواهیم داشت؟ ادعای خود را دقیقن اثبات نمایید.

n صندوق‌چه‌ی جادویی با شماره‌های 1 تا n داریم. زیر هر صندوق‌چه، یک عدد بین 1 تا n نوشته شده است (ممکن است اعداد نوشته شده در زیر چند صندوق‌چه با هم یک‌سان باشند). توجه کنید ما نمی‌توانیم اعداد نوشته شده در زیر صندوق‌چه‌ها را بخوانیم.

در هر صندوق‌چه تعدادی یاقوت سرخ وجود دارد. ابتدا در همه‌ی صندوق‌چه‌ها بسته است، ولی می‌توان هر بار در یک صندوق‌چه را باز کرد، تعداد یاقوت‌های درون آن را شمرد و در آن را بست. نکته‌ی اسرارآمیز این صندوق‌چه‌ها آن است که به محض بستن در یک صندوق‌چه تمامی‌ی یاقوت‌های درون آن به صندوق‌چه‌یی منتقل می‌شوند که شماره‌ی آن، زیر این صندوق‌چه نوشته شده است.

به عنوان مثال، به جدول زیر توجه کنید:

شماره‌ی صندوق‌چه	عدد نوشته شده‌ی زیر صندوق‌چه	تعداد اولیه‌ی یاقوت‌ها
1	2	6
2	2	8
3	1	3

اگر در ابتدا در صندوق‌چه شماره‌ی 3 را باز کنیم، 3 یاقوت می‌بینیم ولی به محض بستن در آن، این صندوق‌چه خالی شده و تمام یاقوت‌ها آن به صندوق‌چه‌ی شماره‌ی 1 منتقل می‌شود. حال اگر در صندوق‌چه‌ی شماره 2 را باز کنیم، 8 یاقوت می‌بینیم ولی با بستن در، چون زیر این صندوق‌چه عدد 2 نوشته شده است 8 یاقوت در هم‌این صندوق‌چه باقی می‌ماند. سپس اگر در صندوق‌چه‌ی شماره‌ی 1 را باز کنیم، 9 یاقوت می‌بینیم (6 یاقوت از قبل و 3 یاقوت از صندوق‌چه‌ی شماره‌ی 3). با بستن در آن این صندوق‌چه هم خالی می‌شود و اکنون در صندوق‌چه‌ی شماره‌ی 2، 17 یاقوت موجود است. اگر دوباره در صندوق‌چه‌ی شماره‌ی 1 را باز کنیم یاقوتی نمی‌بینیم.

توجه کنید که مجاز نیستیم هم‌زمان در چند صندوق‌چه را باز کنیم یا به یاقوت‌ها دست بزنیم؛ فقط می‌توانیم در یک صندوق‌چه‌ی دل‌خواه را باز کنیم، یاقوت‌های درون آن را بشماریم و در آن را ببندیم.

ثابت کنید با انجام عمل فوق (به تعداد دل‌خواه) می‌توان از تعداد کل یاقوت‌ها مطلع شد.

پاسخ‌های نوبت یکم
مرحله‌ی دوم سیزدهمین المپیاد

۱ در واقع جمع دو عدد x و y بر این گونه، یای انحصاری‌ی آن دو عدد، $x \oplus y$، را به دست می‌دهد. داریم $x \oplus x = 0$ که در هیچ دسته‌یی نیست. پس نمی‌توان عددی را با خود جمع کرد. این تصریح نشده است.•

ا یکی از دسته‌بندی‌ها که در واقع دسته‌بندی به 3 دسته است، به گونه‌ی زیر می‌باشد.

$$\{\}, \{0011, 0110, 1010\}, \{1111, 1100, 1001, 1010\},$$
$$\{0001, 0010, 0100, 1000, 0111, 1011, 1101, 1110\}$$

ب استقرا را روی n به کار می‌گیریم. پایه‌ی $n = 1$ درست انگاشته شده است. همه‌ی رشته‌ها به درازای $4n + 4$ را در نظر می‌گیریم. آن‌هایی را که با 1 آغاز می‌شوند، در یک دسته می‌گذاریم. یای انحصاری‌ی هر دو تایی از این دسته با 0 آغاز می‌شود و از این رو در این دسته نیست. دسته‌بندی باید با رشته‌هایی که با 0 آغاز می‌شوند، پی گرفته شود. آن‌هایی را که با 01 آغاز می‌شوند، در یک دسته و آن‌هایی را که با 001 آغاز می‌شوند، در دسته‌یی دیگر می‌گذاریم. این دو دسته نیز شرط را برآورده می‌سازند. آن‌هایی مانده اند که با 0000 آغاز می‌شوند. به روشنی دسته‌بندی‌ی فرض استقرا برای رشته‌ها با درازای $4n$ یک دسته‌بندی را برای این رشته‌ها به $3n$ دسته انجام می‌دهد. پس با روی هم $3n + 3$ دسته کار انجام شد.

۲ مجموع هر سطر $3(3n + 1)/2$ است. کافی است عددها را به آرایش زیر در جدول جای دهیم.

$$\begin{array}{lll}
n + 1 & n - 0 & 2n + \frac{3n+1}{2} + 0 \\
n + 2 & n - 2 & 2n + \frac{3n+1}{2} + 1 \\
 & \vdots & \\
n + \frac{3n+1}{2} & n - 2\left(\frac{3n+1}{2} - 1\right) & 2n + \frac{3n+1}{2}\,\frac{3n+1}{2} - 1 \\
n + \frac{3n+1}{2} + 1 & n - 1 & 2n + 1 \\
n + \frac{3n+1}{2} + 2 & n - 3 & 2n + 2 \\
 & \vdots & \\
n + \frac{3n+1}{2} + \frac{3n+1}{2} - 1 & n - 2\left(\frac{3n+1}{2} - 1\right) & 2n + \frac{3n+1}{2} - 1
\end{array}$$

۳ در هر قطر به 2 روش، می‌توان یکی را از دو سر قطر برگزید. پس 2^n مجموعه داریم که درست یکی را از دو سر هر یک از قطرها در بر داشته باشند. مرکز دایره در صورتی درون چندگوش جای نمی‌گیرد که n نقطه کنار هم گزیده شده باشند. $2n$ مجموعه بر این سان داریم. پس روی هم $2^n - 2n$ مجموعه‌ی متعادل هست.

۴ ✥ صندوق‌چه‌های 1 تا n را به ترتیب باز می‌کنیم. بار دیگر این کار را انجام داده، صندوق‌چه‌های بی‌یاقوت را کنار می‌گذاریم. این چرخه را هم‌چنان ادامه می‌دهیم تا هیچ صندوق‌چه‌ی مانده‌یی دارای 0 یاقوت یافت نشود. به روشنی هیچ گاه به صندوق‌چه‌ی کنار گذاشته شده یاقوت نخواهد رفت. (چه‌را؟) صندوق‌چه‌ها چرخه‌هایی را به گونه‌ی $[b_1, b_2, \dots, b_c]$ را به دست می‌دهند که یاقوت‌های b_1 به b_2، b_2 به b_3، ...، $b_c - 1$ به b_c، b_c به b_1 می‌رود. کافی است این چرخه‌ها را بیابیم. پس از آن یافتن شمار مرواریدها ساده است. (چه‌گونه؟)

گراف صندوق‌چه‌ها و جابه‌جایی‌ها را در نظر می‌گیریم. هر صندوق‌چه درست یک یال به بیرون و دست پایین یک یال به درون دارد. (چه‌را؟) پس درست یک یال به بیرون و درست یک یال به درون دارد. از این رو گراف از دورهایی تشکیل شده است که هم‌آن چرخه‌ها می‌باشند.

کافی است دریابیم ورودی‌ی هر صندوق‌چه از کدام صندوق‌چه است. صندوق‌چه‌های بازمانده را r_1 تا r_m می‌نامیم. می‌خواهیم ورودی‌ی r_1 را بیابیم. به ترتیب از r_1 تا r_m رفته، آن را و پس از آن r_1 را باز می‌کنیم. پس اگر با باز کردن r_i و سپس r_1، در r_1 یاقوت بود، ورودی‌ی r_1 از r_i است.

پرسش‌های نوبت دوم

مرحله‌ی دوم سیزدهمین المپیاد

۵ شرکت "برادران علی کوچولو" یک شرکت بزرگ تولید جغ‌جغه‌های رنگی است که ساختمان آن تعداد
۱۳۷ زیادی اتاق و تعداد زیادی لامپ دارد. این شرکت برای سیم‌کشی‌ی لامپ‌های ساختمان‌ش آوریل دالتون را استخدام کرده بود. بعد از سیم‌کشی معلوم شد که آوریل نه تنها از تعداد مساوی‌ی کلید و لامپ استفاده نکرده، بل‌که هر کلید را به چند لامپ و هر لامپ را به چند کلید وصل کرده است. به این ترتیب، با زدن یک کلید، هر یک از لامپ‌های متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد (یعنی از روشن به خاموش یا بر عکس تغییر می‌کند.) به این دلیل، در پایان هر روز که کارمندان می‌خواهند با زدن کلیدها همه‌ی لامپ‌ها را خاموش کنند با مشکل مواجه می‌شوند. (این تنها راه خاموش کردن لامپ‌ها است. قطع فیوز، یا شل کردن لامپ‌ها یا کارهای مشابه‌ی دیگر مجاز نیست!) می‌دانیم که در آغاز هر روز همه‌ی لامپ‌ها خاموش اند. پس در پایان روز همیشه می‌توان بعضی از کلیدها را زد که همه‌ی لامپ‌ها دوباره خاموش شوند.

شرکت برای حل مشکل خاموش کردن لامپ‌ها لوک خوش شانس را استخدام کرده است تا در پایان هر روز همه‌ی لامپ‌ها را خاموش کند. لوک پس از عقد قرارداد و بررسی مشکل، کلیدها را از 1 تا N (N تعداد کلیدها) شماره‌گذاری کرد و جدولی با N خانه تهیه کرد تا در خانه‌ی iم بنویسد که کلید iم زده می‌شود یا خیر. او در انتهای هر روز، جدول را بر اساس وضعیت فعلی‌ی لامپ‌ها پر می‌کرد و بعضی از کلیدها مطابق آن می‌زد. با این کار همه‌ی لامپ‌ها خاموش می‌شدند.

ا ثابت کنید که تعداد جدول‌های مختلفی که لوک برای خاموش کردن همه‌ی لامپ‌ها در انتهای هر روز می‌تواند تهیه کند ثابت است و این تعداد بستگی به وضعیت لامپ‌ها در انتهای روز ندارد و فقط به نحوه‌ی سیم‌کشی‌ی آوریل وابسته است.

ب ثابت کنید که این تعداد توانی از 2 است.

۶ یک جدول مجموعه‌یی، جدولی با 2 سطر و n ستون ($n \geqslant 2$) است که در هر یک از $2n$ خانه‌ی آن یکی از
۱۳۹ 3 مجموعه‌ی $\{1,2\}$، $\{1,3\}$ و یا $\{2,3\}$ نوشته شده است. دو خانه از جدول را مجاور می‌نامیم اگر در یک ضلع مشترک باشند. هم‌چنین فرض می‌کنیم خانه‌ی اول هر سطر و خانه‌ی nم هم‌آن سطر مجاور هستند.

(بنا بر این هر خانه‌ی جدول دقیقن با سه خانه‌ی دیگر مجاور است.)

اگر یکی از دو عدد مجموعه‌ی نوشته شده در هر خانه‌ی یک جدول مجموعه‌یی را پاک کنیم (در هر خانه تنها یک عدد باقی بماند)، به گونه‌یی که اعداد باقی مانده در هیچ دو خانه‌ی مجاور آن یک‌سان نباشند، یک جدول رنگی ساخته ایم.

برای مثال در زیر یک جدول مجموعه‌یی با دو جدول رنگی به دست آمده از آن نمایش داده شده است.

1	3	1	2
3	2	3	1

$\Leftarrow$

$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$
$\{1,3\}$	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2\}$

$\Rightarrow$

2	3	1	3
1	2	3	2

یک جدول مجموعه‌یی داده شده است که در آن هیچ دو خانه‌ی مجاوری وجود ندارند که مجموعه‌های نوشته شده در آن خانه‌ها یک‌سان باشد. ثابت کنید می‌توان از این جدول حد اقل دو جدول رنگی‌ی مختلف ساخت.

شرکت YSC دستگاه‌های الکترونیکی‌ی مختلفی را تولید و به بازار روانه کرده است. از جمله دستگاه کارت‌خوان، دستگاه مقایسه‌گر و کارت‌های مغناطیسی. هر یک از دستگاه‌های کارت‌خوان و نیز هر کارت مغناطیسی یک حافظه دارد که یک عدد در آن ذخیره می‌شود. هنگامی که یک کارت مغناطیسی را به دستگاه کارت‌خوان وارد کنیم دو نوع عمل می‌توانیم انجام بدهیم:

- با فشار دادن دکمه‌ی سبز دستگاه کارت‌خوان، عدد ذخیره شده در کارت پاک می‌شود و و به جای آن عدد موجود در حافظه‌ی کارت‌خوان نوشته می‌شود.
- با فشار داردن دکمه‌ی قرمز عکس این عمل انجام می‌شود، یعنی عدد ذخیره شده در حافظه‌ی کارت‌خوان پاک می‌شود و به جای آن عدد موجود در حافظه‌ی کارت نوشته می‌شود.

کار دستگاه مقایسه‌گر آن است که وقتی دو کارت را به طور هم‌زمان به دو ورودی‌ی آن وارد کنیم دستگاه نشان می‌دهد که عدد ذخیره شده در کدام یک از کارت‌ها بزرگ‌تر است. در صورت مساوی بودن این دو عدد دستگاه آن را نیز مشخص می‌کند.

در یک روز تعطیل، شرکت YSC تصمیم گرفت یک بازی‌ی دسته‌جمعی بین 100 کارمند خود برگزار کند. برای این بازی 100 دستگاه کارت‌خوان روی یک میز طولانی به ترتیب از چپ به راست قرار داده شد. هم‌چنین دو عدد کارت و یک دستگاه مقایسه‌گر و یک قلم و دفترچه‌ی یادداشت به هر کارمند داده شد.

این بازی در 101 مرحله انجام می‌شود. در هر مرحله‌ی بازی، هر یک از کارمندان می‌تواند یکی از دستگاه‌های کارت‌خوان را انتخاب و یک بار از آن استفاده کند (یعنی یکی از کارت‌های خود را وارد آن دستگاه نماید، فقط یکی از کلیدهای سبز یا قرمز را فشار دهد و کارت را خارج کند). توجه کنید که هر دستگاه کارت‌خوان در هر مرحله تنها می‌تواند مورد استفاده‌ی یک کارمند قرار گیرد. اما هر کارمند می‌تواند به هر تعداد و در هر زمان از دستگاه مقایسه‌گر خود استفاده کند.

چون اعداد به صورت الکترونیکی در حافظه‌ها ذخیره می‌شوند کارمندان به هیچ روشی نمی‌توانند از مقدار عددهای ذخیره شده در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها یا کارت‌ها مطلع شوند. هم‌چنین هیچ یک از کارمندان نمی‌توانند کارت خود را در اختیار هم‌کاران‌ش بگذارد یا به دستگاه مقایسه‌گر دیگران وارد کند.

در ابتدای بازی در حافظه‌ی هر یک از دستگاه‌های کارت‌خوان یک عدد ذخیره شده است به طوری که این اعداد از هم متمایز اند. هدف آن است که اعدادی که در ابتدای بازی در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها ذخیره شده بودند در انتهای مرحله‌ی 101م به صورت مرتب شده از چپ به راست در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها قرار داشته باشند. یعنی کوچک‌ترین عدد از بین 100 عدد اولیه، در پایان بازی در حافظه‌ی سمت چپ‌ترین کارت‌خوان، دومین عدد در حافظه‌ی کارت‌خوان بعدی و ... و به هم‌این ترتیب بزرگ‌ترین عدد در حافظه‌ی سمت راست‌ترین کارت‌خوان ذخیره شده باشد.

یک شیوه طراحی کنید که اگر کارمندان بر اساس آن قبل از شروع بازی هم‌آهنگ شوند و بر طبق آن بازی کنند، به هدف بازی دست پیدا کنند. برای این کار نشان دهید که یک کارمند دل‌خواه در هر مرحله چه کاری و با کدام کارت‌خوان انجام می‌دهد.

۸ ۱۴۱ سارا و برادرش دارا مشغول یک بازی هستند. این بازی روی یک صفحه‌ی شترنجی‌ی بسیار بزرگ انجام می‌شود. صفحه در ابتدا خالی است و سارا 900 مهره دارد. بازی به صورت مرحله‌یی انجام می‌شود و هدف آن است که سارا و دارا با مشارکت هم کاری کنند که در کم‌ترین تعداد مرحله تمام مهره‌های سارا به دارا منتقل شود.

در هر مرحله از بازی یکی از دو کار زیر را می‌توان انجام داد.

۱. سارا می‌تواند یک سطر از جدول را انتخاب کند و تعدادی از مهره‌های خود را در خانه‌های دل‌خواهی از آن سطر قرار دهد.

۲. دارا می‌تواند یک ستون را انتخاب کند و همه‌ی مهره‌های آن ستون را بردارد.

شرط مهم بازی آن است که در هیچ زمانی تعداد مهره‌های موجود در صفحه نباید از 36 عدد بیش‌تر شود. بدیهی است که در یک زمان نمی‌توان بیش از یک مهره در یک خانه قرار داد.

روشن است که این کار را در 300 مرحله می‌توان انجام داد. این روش در زیر نمایش داده شده است که در آن هر x یک مهره است و عددها شماره‌های مرحله‌ها را نشان می‌دهند. اگر شماره‌ی یک مرحله در سمت چپ سطری نوشته شده باشد، در آن مرحله سارا در آن سطر 6 مهره گذاشته است. شماره‌ی مرحله در بالای یک ستون به این معنی است که دارا در آن مرحله 6 مهره‌ی موجود در آن ستون را برداشته است. روشن است که لزومی ندارد که سارا و دارا یک در میان بازی کنند.

روشی برای این بازی ارایه دهید که تعداد مرحله‌های آن

```
   7  8  9 10 11 12
1  x  x  x  x  x  x
2  x  x  x  x  x  x
3  x  x  x  x  x  x
4  x  x  x  x  x  x
5  x  x  x  x  x  x
6  x  x  x  x  x  x 19 20 21 22 23 24
                 13  x  x  x  x  x  x
                 14  x  x  x  x  x  x
                 15  x  x  x  x  x  x
                 16  x  x  x  x  x  x
                 17  x  x  x  x  x  x
                 18  x  x  x  x  x  x
                                  25    ...
                                  26    ...
```

الف از 230 تا 240 باشد،

ب کم‌تر از 230 باشد.

راه حل‌های خود را به طور خلاصه توضیح دهید و مانند شکل فوق آن را نمایش دهید.

پاسخ‌های نوبت دوم
مرحله‌ی دوم سیزدهمین المپیاد

۵ هر جدول را متناظر با یک رشته‌ی دودویی‌ی Nرقمی می‌گیریم؛ اگر کلید iام باید زده شود، در جای‌گاه iام رشته 1 و جز این 0 می‌گذاریم. می‌دانیم اگر a و b دو رشته‌ی دودویی‌ی nنویسه‌یی باشند، $c = a \oplus b$، یای انحصاری‌ی a و b، بر این شیوه از a و b به دست می آید: اگر در جای‌گاه iام a و b نویسه‌هایی یک‌سان باشند، جای‌گاه iام c با 0 و جز این با 1 پر می‌شود. به روشنی برای هر a داریم $a \oplus a = o$ که o رشته‌یی با نویسه‌های 0 است. برای هر a و b نیز داریم $(a \oplus b) \oplus b = a$. گیریم V مجموعه‌یی از رشته‌های دودویی و a رشته‌یی دودویی باشد. مجموعه‌ی $a \oplus V$ به گونه‌ی $a \oplus V = \{a \oplus v \mid v \in V\}$ به دست می‌آید.

الف مجموعه‌ی رشته‌هایی را که به خاموش ماندن چراغ‌ها در صورت خاموش بودن آن‌ها در آغاز منجر می‌شوند، $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ می‌گیریم. نشان می‌دهیم خاموش کردن چراغ‌ها برای هر وضعیت آغازین دیگر نیز اگر شدنی باشد، به n روش انجام می‌گیرد. گیریم وضعیت کنونی به روش a خاموش گردد. پس هر رشته از مجموعه‌ی $a \oplus B$ منجر به خاموش شدن چراغ‌ها می‌شود. (چه‌را؟) به روشنی داریم $\#(a \oplus b) = \#B$. اکنون باید نشان دهیم همه‌ی گونه‌های خاموش کردنِ وضعیت کنونی به حساب آمده اند. اگر گونه‌ی a' چراغ‌ها را خاموش کند، $a \oplus a'$ رشته‌یی است که وضعیت خاموش را به خاموش می‌برد. از این رو داریم $a \oplus a' \in B$. گیریم $a \oplus a' = b_m$. پس داریم $a \oplus (s \oplus a') = a' = a \oplus b_m$ و به این سان a' در $a \oplus B$ به شمار آمده است.

ب نشان می‌دهیم شمار رشته‌هایی که از خاموشی به خاموشی می‌برند، توانی از 2 است. مجموعه‌ی B را از رشته‌هایی که از خاموشی به خاموشی می‌برند، بر این شیوه می‌سازیم. در آغاز $B = \{o\}$ که o رشته‌ی همه0 است و به روشنی از خاموشی به خاموشی می‌رود. تا کنون $\#B = 2^0$. گیریم $b \notin B$ رشته‌یی باشد که از خاموشی به خاموشی می‌برد. داریم $\#(b \oplus B) = \#B$. (چه‌را؟) هم‌چنین داریم $B \cap (b \oplus B) = \emptyset$. چه‌را؟ گیریم $b_1, b_2 \in B$ و $b_1 = b \oplus b_2$. پس داریم $b_1 \oplus b_2 = (b \oplus b_2) \oplus b_2 = b$. ولی با توجه به چه‌گونگی‌ی ساخت B برای هر $b_1, b_2 \in B$، داریم $b_1 \oplus b_2 \in B$. (چه‌را؟) به این سان رشته‌های مجموعه‌ی $b \oplus V$ را به V می‌افزاییم. پس شمار عضوهای V دو برابر شده، هم‌چنان توانی از 2 می‌ماند.

۶ در هر خانه به جای هر مجموعه عضو سوم را که در آن مجموعه نیامده است، جای‌گزین می‌کنیم. همه‌ی عددهای خانه‌های هم‌سایه در جدولِ به دست آمده نایک‌سان هستند. پس هر یک از تبدیل‌های چرخشیِ $[1,2,3]$ و $[3,2,1]$ یک جدول را به گونه‌ی خواسته شده به دست می‌دهند.

۷ در گام یکم هر فرد سراغ یکی از کارت‌خوان‌ها رفته، عدد آن را در یکی از کارت‌های خود می‌ریزد. پس از آن در هر گام هر فرد سراغ یکی از کارت‌خوان‌هایی که تا کنون نرفته است، می‌رود و با ریختن عدد آن کارت‌خوان در کارت دیگر خود، آن را با عدد کارت‌خوان آغازین می‌سنجد. به روشنی می‌توان 99 گام را به این سان پی گرفت. (چه‌گونه؟)

پس از 100 گام، هر فرد عددهای همه‌ی 99 کارت‌خوان دیگر را با عدد کارت‌خوان آغازین سنجیده است. اکنون روشن است که عدد کارت‌خوان آغازین چندمین عدد در میان همه‌ی عددها است؛ اگر k تا کوچک‌تر از آن بود، این عدد $k+1$می است. پس هر فرد در گام پایانی به سادگی عدد کارت‌خوان آغازین را در جای درست جای‌گذاری می‌کند.

۸ گرچه با حل ب قسمت ا نیز پاسخ داده می‌شود، برای هر یک از قسمت‌ها پاسخی جداگانه می‌آوریم.

ا با 8 حرکت سارا آرایشی به گونه‌ی

```
x
x x
x x x
x x x x
x x x x x
x x x x x x
x x x x x x x
x x x x x x x x
```

به دست می‌آید که 36 مهره دارد. $900 - 36 = 108 \cdot 8$ مهره‌ی دیگر مانده است. در گام‌های بعدی به نوبت دارا ستون 8تایی را برمی‌دارد و سارا سطری 8تایی را در زیر آرایش می‌افزاید. پس در $108 \cdot 2$ گام مهره‌های سارا به پایان می‌رسد و در 8 گام دارا مهره‌های مانده‌ی روی تخته را برمی‌دارد. به این سان در روی هم $232 = 8 + 2 \cdot 108 + 8$ گام همه‌ی مهره‌ها به دارا می‌رسد.

ب سارا با 3 گام ساختار زیر را به دست می‌دهد.

```
x x x x x
x x x x x x
x x x x x x x
```

از این پس سارا مانند قسمت پیش در هر گام 8 مهره می‌گذارد و دارا ستون سوی چپ را برمی‌دارد. پس از 108 گامِ 8تاییِ سارا $5 + 6 + 7 = (8 \cdot 108 + 7 + 6 + 5) - 900$ مهره می‌ماند. در گام‌های مانده سارا به ترتیب 7، 6، و 5 مهره می‌گذارد و دارا هم‌چنان در پی حرکت سارا ستون چپ را برمی‌دارد.


```
x
x x
x x x  ¦
x x x x¦
x x x x¦x
x x x x¦x x
x x x x¦x x x
x x x x¦x x x x
-------+--------
  x x x¦x x x x
    x x¦x x x x
      x¦x x x x
       ¦
```

با پایان یافتن مهره‌های سارا، پس از آخرین گام 8تاییِ دارا مهره‌های روی تخته با 4 حرکت 7، 6، 5، و 4تایی برداشته می‌شوند. به این سان در $223 = 4 + 2 \cdot 108 + 3$ گام همه‌ی مهره‌ها به دارا می‌رسد.

فهرست‌ها

فهرست پرسشی

۴۵ ارایه‌ی ساختار
۴۶ ❖ برهان خلف، اصل فرین، استقرا
۴۷ ❖ الگوریتم، نمایش پایه‌یی
۴۸ ❖ نمایش پایه‌یی
۴۹ ❖ نمایش پایه‌یی، برهان خلف
۵۰ الگوریتم
۵۱ ❖ الگوریتم، بازگشت
۵۲ ❖❖ الگوریتم، بازگشت، هم‌پایگی
۵۳ رشته‌ها، ارایه‌ی ساختار
۵۴ ❖ شمارش، دسته‌بندی
۵۵ ❖ شمارش
۵۶ ❖ اصل ناوردایی
۵۷ ❖ الگوریتم، ارایه‌ی ساختار
۵۸ ❖❖ رشته‌ها، استقرا، تکرار، اصل فرین
۵۹ ❖ نگره‌ی مجموعه‌ها، استقرا
۶۰ ❖ نگره‌ی بازی‌ها، اصل ناوردایی
۶۱ ❖ نگره‌ی بازی‌ها، اصل ناوردایی، هم‌پایگی
۶۲ ❖ الگوریتم، برهان خلف، اصل دیریکله
۶۳ ❖ الگوریتم، اصل ناوردایی
۶۴ ❖ دسته‌بندی، نگره‌ی اعداد، تکرار
۶۵ ❖ بازگشت، استقرا
۶۶ ❖ استقرا
۶۷ ❖ شمارش، ارایه‌ی ساختار
۶۸ ❖ یافتن کران و ارایه‌ی ساختار
۶۹ ❖ یافتن کران و ارایه‌ی ساختار
۷۰ اصل ناوردایی، نگره‌ی گراف‌ها
۷۱ ❖ نگره‌ی بازی‌ها، هم‌پایگی، استقرا
۷۲ ❖❖ الگوریتم، نمایش پایه‌یی، برهان خلف
۷۳ ❖ استقرا، ارایه‌ی ساختار
۷۴ ❖ شمردن، تناظر
۷۵ ❖ شمارش، هم‌پایگی
۷۶ ❖ استقرا، ارایه‌ی ساختار
۷۷ ❖ رشته‌ها، استقرا، دسته‌بندی
۷۸ الگوریتم، رشته‌ها
۷۹ ❖ الگوریتم، رشته‌ها، نمایش پایه‌یی
۸۰ ❖❖ الگوریتم، رشته‌ها
۸۱ ❖ استقرا، اصل فرین
۸۲ نگره‌ی بازی‌ها، ارایه‌ی ساختار
۸۳ ❖ نگره‌ی بازی‌ها، استقرا
۸۴ رنگ‌آمیزی، هم‌پایگی
۸۵ ارایه‌ی ساختار
۸۶ ❖ برهان خلف، دسته‌بندی
۸۷ تناظر
۸۸ ارایه‌ی ساختار
۸۹ استقرا
۹۰ ❖❖ اصل فرین
۹۱ ❖ اصل دیریکله، اصل فرین
۹۲ ❖ شمردن
۹۳ اصل فرین
۹۴ ❖ یافتن کران و ارایه‌ی ساختار
۹۵ ❖ استقرا، یافتن کران، دسته‌بندی
۹۶ ❖❖ نگره‌ی گراف‌ها، دسته‌بندی
۹۷ ارایه‌ی ساختار
۹۸ ❖ استقرا

۹۹ ❖ شمارش، تناظر، هم‌پایگی
۱۰۰ ❖ استقرا، تکرار
۱۰۱ ❖❖ استقرا، نگره‌ی اعداد، تکرار
۱۰۲ شمردن، هم‌پایگی
۱۰۳ نگره‌ی مجموعه‌ها
۱۰۴ ❖ الگوریتم، رشته‌ها
۱۰۵ ❖ استقرا، بازگشت
۱۰۶ ❖ یافتن کران و ارایه‌ی ساختار
۱۰۷ ❖ یافتن کران و ارایه‌ی ساختار
۱۰۸ ❖ یافتن کران و ارایه‌ی ساختار
۱۰۹ ❖ نگره‌ی بازی‌ها، استقرا
۱۱۰ ❖ استقرا
۱۱۱ ❖❖ نمایش پایه‌یی، بازگشت، هم‌پایگی
۱۱۲ ❖ ارایه‌ی ساختار، نگره‌ی اعداد
۱۱۳ ❖❖ برهان خلف، اصل فرین
۱۱۴ ❖ یافتن کران، اصل ناوردایی
۱۱۵ ❖ شمارش
۱۱۶ ارایه‌ی ساختار
۱۱۷ ❖ ارایه‌ی ساختار
۱۱۸ ❖ الگوریتم
۱۱۹ ❖❖ نگره‌ی مجموعه‌ها، هم‌پایگی
۱۲۰ ❖ اصل دیریکله، استقرا
۱۲۱ برهان خلف
۱۲۲ ❖ اصل دیریکله
۱۲۳ ❖❖ یافتن کران، تناظر
۱۲۴ الگوریتم
۱۲۵ ❖ الگوریتم
۱۲۶ اصل فرین، استقرا
۱۲۷ ❖ ارایه‌ی ساختار، اصل فرین
۱۲۸ ❖❖ ارایه‌ی ساختار، اصل فرین، بازگشت
۱۲۹ ارایه‌ی ساختار
۱۳۰ ❖ ارایه‌ی ساختار
۱۳۱ ❖ تناظر
۱۳۲ ارایه‌ی ساختار، دسته‌بندی، نمایش پایه‌یی
۱۳۳ ❖ دسته‌بندی، نمایش پایه‌یی، استقرا
۱۳۴ ❖ ارایه‌ی ساختار
۱۳۵ شمارش
۱۳۶ ❖ الگوریتم، نگره‌ی گراف‌ها، تکرار
۱۳۷ ❖ نمایش پایه‌یی، تناظر
۱۳۸ ❖ نمایش پایه‌یی، تناظر
۱۳۹ ارایه‌ی ساختار
۱۴۰ ❖ الگوریتم
۱۴۱ ارایه‌ی ساختار
۱۴۲ ❖ ارایه‌ی ساختار

فهرست گونه‌یی

فهرست سختی

این کتاب با سیستمی بر پایه‌ی سیستم TeX برای حروف‌چینی‌ی متن‌های فنی، کار Donald E Knuth، ب کمک ماکروهایی که نویسنده فراهم آورد، آماده شده است. فونت به کار رفته در متن را نویسنده طراحی کرد فونت به کار رفته در عبارت‌های ریاضی AMS Euler طراحی‌ی Hermann Zapf می‌باشد. دیگر فونت‌های به کار رفته نیز Computer Modern، Tahoma، Monofur، Courier New، و Sans Serief می‌باشند.

پاسخی بر المپیادهای کامپیوتر ایران

یاسر احمدی فولادی

مرحله‌های دوم، از آغاز تا کنون

این کتاب به پاسخ‌گویی‌ی آزمون‌های مرحله‌های دوم المپیادهای کامپیوتر ایران، از آغاز تا کنون، پرداخته است.

ویژگی‌های متمایز کننده‌ی این کتاب

- تنها مرجع کامل پاسخ‌گویی به آزمون‌های مرحله‌های دوم المپیادهای کامپیوتر ایران است.
- تنها مرجع پاسخ‌گویی است که به تصحیح آزمون‌های المپیادهای ایران پرداخته است.
- تنها مرجع تایید شده‌ی هیات تحریریه‌ی باشگاه دانش‌پژوهان جوان برای پاسخ‌گویی به آزمون‌های المپیادهای کامپیوتر ایران است.
- دارای سه فهرست دسته‌بندی‌ی مساله‌ها، و تنها کتاب با این شیوه‌ی دست‌یابی‌ی دل‌خواه به مساله‌ها است.

ISBN 964-94685-5-2

90000